OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

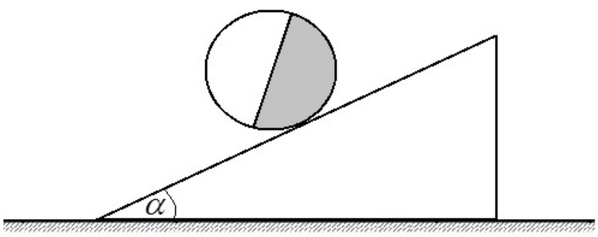
FIZIKA II. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvasható-an dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak. Amennyiben valamelyik feladatban szükség van a nehézségi gyorsulás értékére, úgy számoljon $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel!

1. feladat

Két igen vékony falú, 1:3 tömegarányú, azonos sugarú félgömbhéjat összeillesztünk, majd az így kapott gömbhéjat egy lejtőre helyezzük az *ábra* szerint. Legfeljebb mekkora lehet a lejtő hajlásszöge, hogy a gömbhéj egyensúlyi állapotban lehessen a lejtőn? Legalább mekkora kell legyen a tapadási együttható?

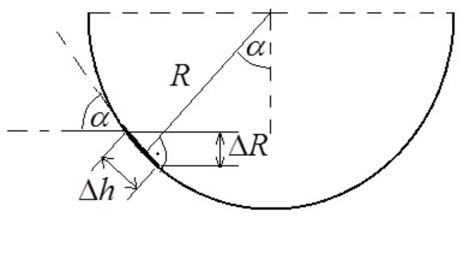


Segítség: az r belső és R külső sugarú félgömbhéj tömegközéppontja a gömbi középponttól $d = \frac{3(R^4-r^4)}{8(R^3-r^3)}$ *távolságra van.*

Megoldás

Elsődleges lépés belátni, hogy egy igen vékony falú félgömbhéj tömegközéppontja a sugár felében van. Erre többféle módszer is van:

(i) A félgömböt sűrű felosztással egyenközűen felszeleteljük a főkörrel párhuzamos abroncsokra az *ábrán* látható módon. Kellően finom szeletelés esetén az abroncsok úgy tekinthetők, mintha azokat (változó α kúpszögű) kúpokból vágtuk volna ki.



Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja.

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter
Nemzeti Tehetség Program

Az ábra jelölései szerint:

$$\Delta h = \frac{\Delta R}{\sin\alpha},$$

amivel egy abroncs felülete

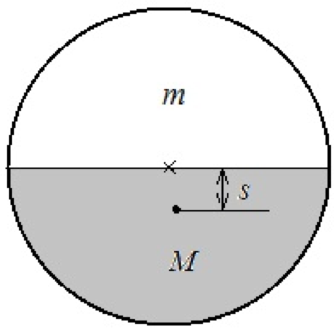
$$\Delta A = 2R\sin\alpha \cdot \pi\Delta h = 2R\pi\Delta R.$$

Ez azt jelenti, hogy minden abroncs felülete azonos, ennélfogva tömegük is azonos. Ebből következik, hogy a tömegközéppont a sugár felében van.

(*ii*) A megadott képletet alkalmazzuk $r = R - x$ esetére, ahol $x \ll R$, és felhasználjuk az $(1 + \frac{x}{R})^n \approx 1 + n\frac{x}{R}$ közelítést:

$$d = \frac{3\left[R^4 - (R-x)^4\right]}{8\left[R^3 - (R-x)^3\right]} = \frac{3}{8}R\frac{1-(1-x/R)^4}{1-(1-x/R)^3} \approx \frac{3}{8}R\frac{1-1+4x/R}{1-1+3x/R} = \frac{R}{2}.$$

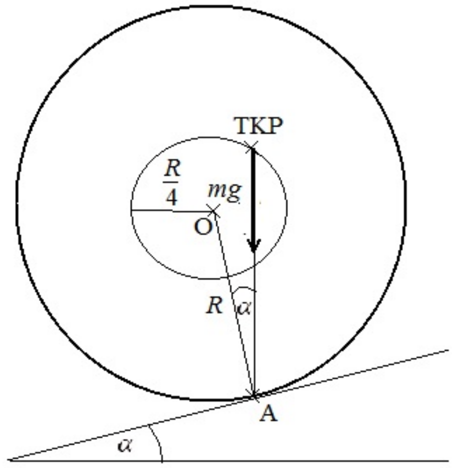
(*iii*) Numerikusan, például az $r = 0{,}99R$ vagy az $r = 0{,}999R$ értéket behelyettesítve, rendre a $0{,}498R$, illetve a $0,4998R$ eredményt kapjuk, amivel jó közelítéssel állíthatjuk, hogy a tömegközéppont a sugár felénél helyezkedik el.



Ezt követően határozzuk meg a két félgömbhéjból álló gömbhéj tömegközéppontjának helyét. Legyen ez a gömbhéj középpontjától s távolságra (lásd az *ábrát*), valamint legyen $m/M = 1/3$. Ezzel a tömegközéppont helye:

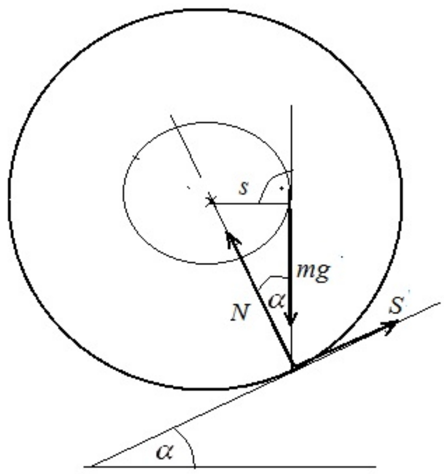
$$s = \frac{MR/2 - mR/2}{m+M} = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\frac{R}{2} = \frac{R}{4}.$$

A kritikus hajlásszög megtalálásához vizsgáljuk az alábbi *ábrán* látható helyzetet. A gömbhéj lejtővel való A érintkezési pontjára a kényszererőnek és a súrlódási erőnek 0 a forgatónyomatéka. Ahhoz, hogy a gömbhéj a lejtőn egyensúlyban maradjon, a nehézségi erő támadáspontjának (a TKP-val jelölt tömegközéppontnak) az A pont felett kell lennie. Az ábrán berajzolt két szög azonos, mert merőleges szárú hegyesszögek. Tehát a lejtő hajlásszöge akkor a legnagyobb, ha az A pontot a TKP-val összekötő szakasz az O középpontú, $R/4$ sugarú kör érintője. Ekkor a TKP-O szakasz éppen vízszintes helyzetű.



Tehát a kritikus szöghelyzetet a következő *ábra* mutatja. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\sin\alpha = \frac{s}{R} = \frac{1}{4} \quad \to \quad \alpha \approx 14{,}5°.$$



A lejtővel párhuzamos erők eredője zérus, azaz határesetben

$$mg\sin\alpha = S = \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha,$$

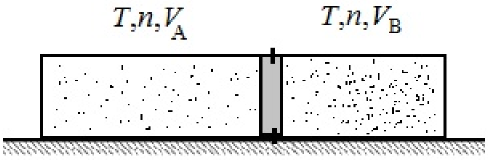
ahonnan a tapadási súrlódási együtthatónak legalább

$$\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}26$$

értékűnek kell lennie.

2. feladat

Egy hőszigetelt falú, vízszintes helyzetű, rögzített, henger alakú, 1,2 dm^2 keresztmetszetű tartályban lévő levegőt súrlódásmentesen mozgó, szintén hőszigetelő anyagból készült dugattyú oszt két részre. Az elzárt részekben a levegő mennyisége azonos. Kezdetben a dugattyú olyan helyzetben rögzített, hogy a bal oldali részben a levegő térfogata 4 liter, a másik részben pedig 3 liter. Ekkor mindkét részben a levegő hőmérséklete 300 K.



A dugattyú rögzítését megszüntetjük. A dugattyú rögzítésének megszüntetését követően mekkora utat tesz meg a dugattyú az első megállásáig? (A dugattyú hőkapacitása elhanyagolható.)

Megoldás

Használjuk a következő jelöléseket. Induláskor a térfogat a bal oldalon $V_\mathrm{A} = 4$ liter, a nyomás p_A, a másik oldalon a térfogat $V_\mathrm{B} = 3$ liter, a nyomás p_B, az egyforma hőmérséklet pedig $T = 300$ K. Az első megálláskor a térfogat a bal oldalon V_a, a hőmérséklet T_a, a másikon V_b és T_b.

Alkalmazzuk a $pV = nRT$ állapotegyenletet a kiindulási állapotban lévő levegőkre. Az egyenlet jobb oldala a két esetben egyforma, így a bal oldalak is egyenlők, vagyis a kisebb térfogatú helyen nagyobb a nyomás. Ez azt jelenti, hogy $p_\mathrm{B} > p_\mathrm{A}$, a dugattyú balra fog elindulni a rögzítés megszűnése után.

A hőszigetelés miatt a (levegő-dugattyú) rendszer és a környezet között nincs hőcsere, a merev tartály miatt pedig mechanikai energiacsere sincs. A dugattyú megállásakor a mechanikai energiája annyi, mint kiinduláskor, ezért kiinduláskor és a dugattyú megállásakor a tartály két részében lévő levegő belső energiáinak összege egyenlő, vagyis amennyivel az egyiké csökken, a másiké annyival növekszik, tehát

$$\frac{f}{2}nR(T_\mathrm{a} - T) = \frac{f}{2}nR(T - T_\mathrm{b}), \quad \text{azaz} \quad T_\mathrm{b} = 2T - T_\mathrm{a}. \tag{1}$$

A hőszigetelés miatt mindkét légtérben adiabatikus folyamat történik, amire $TV^{\kappa-1} = \text{állandó}$. Levegő esetén $\kappa - 1 = 0{,}4$, ezzel

$$TV_\mathrm{A}^{0,4} = T_\mathrm{a}V_\mathrm{a}^{0,4} \quad \text{és} \quad TV_\mathrm{B}^{0,4} = T_\mathrm{b}V_\mathrm{b}^{0,4}. \tag{2}$$

Használjuk fel, hogy

$$V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B} = V_\mathrm{a} + V_\mathrm{b}. \tag{3}$$

A (2) egyenletekből

$$V_\mathrm{a} = \left(\frac{T}{T_\mathrm{a}}\right)^{2,5} V_\mathrm{A} \quad \text{és} \quad V_\mathrm{b} = \left(\frac{T}{T_\mathrm{b}}\right)^{2,5} V_\mathrm{B}, \tag{4}$$

melyeket (3)-ba helyetteítve

$$\left(\frac{T}{T_\mathrm{a}}\right)^{2,5} V_\mathrm{A} + \left(\frac{T}{T_\mathrm{b}}\right)^{2,5} V_\mathrm{B} = V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B}.$$

Felhasználva (1)-et

$$\left(\frac{T}{T_\mathrm{a}}\right)^{2,5} V_\mathrm{A} + \left(\frac{T}{2T - T_\mathrm{a}}\right)^{2,5} V_\mathrm{B} = V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B},$$

numerikusan (a hőmérsékletet K-ben, a térfogatot literben mérve)

$$\left(\frac{300}{T_\mathrm{a}}\right)^{2,5}\cdot 4+\left(\frac{300}{600-T_\mathrm{a}}\right)^{2,5}\cdot 3=7.$$

Az exponenciális egyenlet egyik gyöke nyilván $T_\mathrm{a}=300$ K, hiszen az energia akkor is megmarad, ha a dugattyú nem mozdul el. A másik gyököt számológéppel például kétoldali közelítéssel (iteráció), vagy próbálgatással határozhatjuk meg, amiből $T_\mathrm{a}=325$ K.

A (4) egyenletből

$$V_\mathrm{a}=\left(\frac{T}{T_\mathrm{a}}\right)^{2,5}V_\mathrm{A}=\left(\frac{300}{325}\right)^{2,5}\cdot 4\ \mathrm{dm}^3\approx 3{,}3\ \mathrm{dm}^3.$$

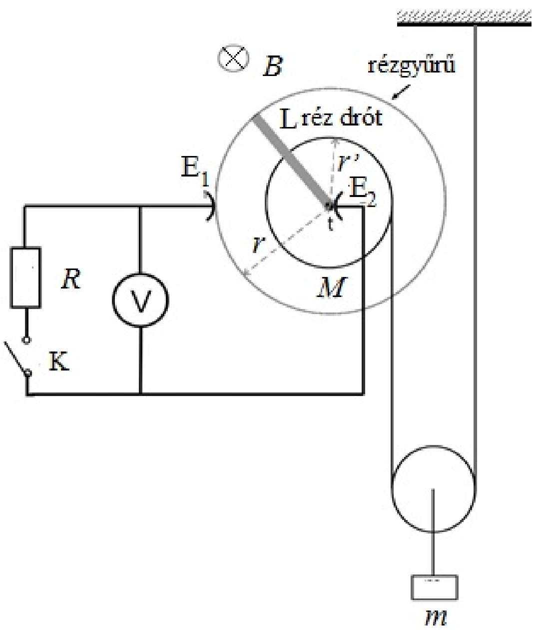
A dugattyú által megtett út

$$s=\frac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{a}}{A}\approx 0{,}58\ \mathrm{dm}.$$

A dugattyú tehát 6 cm hosszú utat tesz meg az első megállásáig

3. feladat

Az *ábrán* látható elrendezésben egy $M = 10$ kg tömegű, $r = 1$ m sugarú, könnyen forgó plexikorong szélén elhanyagolható tömegű, elhanyagolható ellenállású, vékony rézgyűrű van. A rézgyűrű a korong t tengelyével vékony, sugárirányú, kicsiny ellenállású, merev L rézdróttal van összekötve. A korong vízszintes tengelye vezető anyagból készült, és a homogénnek tekinthető $B = 0{,}1$ T indukciójú mágneses mező indukcióvonalaival párhuzamos. A koronghoz rögzítve, azzal közös tengelyen egy $r' = r/2$ sugarú, elhanyagolható tömegű, vékony plexikorong van, melyre kellően hosszú, könnyű, nyújthatatlan szigetelő madzag segítségével egy $m = 50$ g tömegű, fából készült kis testet akasztunk egy elhanyagolható tömegű, súrlódásmentesen mozgó csiga felhasználásával.



A tengelyhez az E_1, a rézgyűrűhöz az E_2 ponton súrlódásmentes érintkezőket kapcsolunk, melyekkel az ábrán látható áramkört hozzuk létre. $R = 5\ \Omega$, K egy kapcsoló és V egy ideális feszültségmérő.

a) Az m tömegű testet *nyitott kapcsoló* esetén elengedjük. Mekkora értéket mutat a feszültségmérő az m tömegű test elengedése után 4 s elteltével?

b) Mekkora maximális teljesítménnyel forgathatja az m tömegű test a korongot, ha az m tömegű testet a kapcsoló *zárása után* engedjük el?

A közegellenállástól eltekinthetünk.

Megoldás

a) Tekintsük egy adott időpontban az m tömegű test mozgásának kicsiny Δt időtartamát. Ez idő alatt a rézdrót szögsebessége állandónak tekinthető, így szögelfordulása $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Az E_1 és E_2 pontok között feszültség indukálódik a fluxusváltozás miatt. Az indukálódó feszültség nagysága a Faraday-féle indukciós törvény szerint

$$U_\mathrm{i} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta A}{\Delta t}.$$

A Δt idő alatt súrolt ΔA terület

$$\Delta A = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} r^2 \pi = \frac{\omega r^2 \Delta t}{2}.$$

Megjegyzés: Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a körcikk területére vonatkozó összefüggést írjuk fel: $\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot r\Delta\varphi = \frac{1}{2}\omega r^2 \Delta t$.

Tehát az indukált feszültség az idő függvényében

$$U_\mathrm{i}(t) = \frac{B\omega(t) r^2}{2}. \tag{1}$$

Az indukált feszültség meghatározásához szükség van $\omega(t)$-re. Ehhez használjuk az $\omega(t) = v_{r'}(t)/r'$ összefüggést, ahol $v_{r'}$ az r' sugarú korong kerületi pontjának sebessége. Ennek meghatározásához írjuk fel az m tömegű test mozgásegyenletét

$$mg - 2F_\mathrm{k} = ma, \tag{2}$$

illetve az M tömegű korong forgására vonatkozó egyenletet is

$$F_\mathrm{k} r' = \frac{1}{2} M r^2 \cdot \frac{a_\mathrm{t}}{r'}, \tag{3}$$

ahol F_k a kötélerő, a_t az r' sugarú plexikorong peremének érintőirányú gyorsulása, melyre $a_\mathrm{t} = 2a$. Felhasználva, hogy $r' = r/2$, majd (3)-at (2)-be helyettesítve

$$mg - 2 \cdot 4Ma = ma \quad \to \quad a = \frac{m}{m + 8M} g.$$

Numerikusan $a = 6{,}13 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Ebből

$$v_{r'}(t) = a_\mathrm{t} t = 2at = \frac{2m}{m + 8M} gt,$$

ami $t = 4$ s esetén 0,049 m/s. Ezzel a szögsebesség

$$\omega(t) = \frac{4m}{m + 8M} \frac{g}{r} t,$$

ami $t = 4$ s esetén 0,098 1/s. Végül az (1) egyenletből megkapjuk, mit mutat a voltmérő t idő elteltével:

$$U_\mathrm{i}(t) = \frac{2m}{m + 8M} Brgt,$$

ami numerikusan $t = 4$ s esetén 4,9 mV.

b) Maximális teljesítmény esetén az m tömegű test állandó sebességgel mozog, így a korong szögsebessége is állandó, azaz szöggyorsulása nulla. Tehát a korongra ható eredő forgatónyomaték nulla. Az L rézdrótban folyó áramra ható $F_\mathrm{L} = BIr$ Lorentz-erő merőleges a rézdrótra és a mágneses indukció irányára, valamint támadáspontja a rézdrót középpontjában van. Ezért a Lorentz-erő és az F_k kötélerő erőkarja is egyaránt $r/2$, tehát $F_\mathrm{k} = F_\mathrm{L}$.

Az Ohm-törvény felhasználásával

$$I = \frac{U_\mathrm{i}}{R},$$

valamint az m tömegű test gyorsulása nulla, ezért

$$mg = 2F_\mathrm{k}.$$

Ezekkel az erők egyenlősége

$$\frac{mg}{2} = Br\frac{U_\mathrm{i}}{R}.$$

Az (1) egyenlet felhasználásával maximális szögsebesség esetén

$$\frac{mg}{2} = \frac{B^2 r^3 \omega_\mathrm{max}}{2R},$$

ahonnan a maximális szögsebesség

$$\omega_\mathrm{max} = \frac{mgR}{B^2 r^3}.$$

Ekkor az m tömegű test P_max maximális forgatóteljesítménye meghatározható a kötélerő $M_\mathrm{k} = F_\mathrm{k} r'$ forgatónyomatékával és ω_max felhasználásával:

$$P_\mathrm{max} = M_\mathrm{k}\omega_\mathrm{max} = \frac{m^2 g^2 R}{4B^2 r^2} \approx 30 \text{ W}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

A félgömbhéj tömegközéppontjának megadása:	4 pont
A gömbhéj tömegközéppontjának megadása:	2 pont
Az egyensúly kritériumának megfogalmazása forgatónyomatékokkal:	2 pont
A kritikus helyzet felismerése és értelmezése:	4 pont
A kritikus hajlásszögre vonatkozó feltétel matematikai megadása:	2 pont
A kritikus hajlásszög numerikus értékének megadása:	1 pont
Az erőkre vonatkozó egyensúlyi feltétel:	2 pont
A tapadási együttható kritikus értéke és a lejtőre merőleges kényszererő kapcsolata:	2 pont
A tapadási súrlódási együttható számértékének helyes megadása:	1 pont
Összesen:	**20 pont**

2. feladat

A dugattyú balra mozdul:	2 pont
A belső energiák összege állandó:	2 pont
Az állandóság egyenletben való kifejezése:	2 pont
Az adiabatikus folyamatokra vonatkozó egyenletek megadása a két levegő esetére:	1+1 pont
A térfogatösszegek állandósága:	1 pont
A keresett hőmérséklettel numerikusan megadott exponenciális egyenlet megadása:	3 pont
Az exponenciális egyenlet fizikailag helyes gyökének meghatározása:	5 pont
A keresett térfogat megadása:	2 pont
A dugattyú útjának kiszámítása:	1 pont
Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	U_i és B közötti összefüggés felírása:	3 pont
	Haladási és forgási mozgásegyenletek felírása, gyorsulás meghatározása:	3 pont
	Szögsebesség meghatározása:	2 pont
	U_i meghatározása:	1 pont
b)	$P = P_\mathrm{max}$, ha $v = v_\mathrm{max}$ felismerése:	2 pont
	Ekkor $\sum M = 0$ és $M_\mathrm{k} = M_\mathrm{L}$:	2 pont
	M_k nagyságának meghatározása P_max esetén:	2 pont
	ω_max meghatározása:	3 pont
	P_max kiszámítása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A fizikailag helytelen gondolatokat tartalmazó egyenletek hibátlan matematikai megoldásáért nem adható pont.