OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

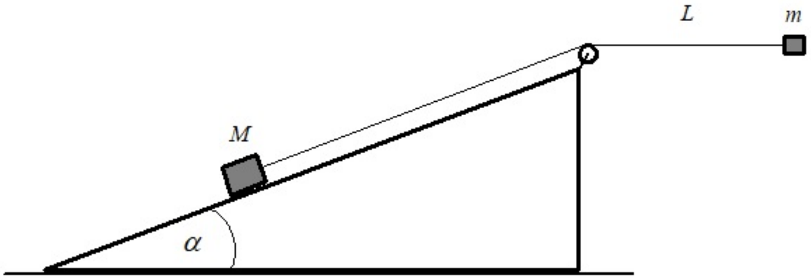
FIZIKA II. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak. Amennyiben valamelyik feladatban szükség van a nehézségi gyorsulás értékére, úgy számoljon $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel!

1. feladat

Egy fonál két végéhez kis méretű testeket erősítünk. Az egyik test tömege m, a másiké M. A fonalat az *ábra* szerint egy $\alpha = 30°$-os, rögzített lejtő tetején lévő, a tengelye körül könnyen forgó, elhanyagolható tömegű és sugarú csigán vetjük át. Kezdetben az M tömegű test a lejtőn van, a hozzá kapcsolódó fonál a lejtővel párhuzamos, a fonál másik, L hosszúságú darabja vízszintes. Ekkor az m tömegű testet elengedjük.



Mekkora legyen az M tömegű test és a lejtő közti tapadási súrlódás együtthatója, hogy az m tömegű test L sugarú pályán α szöggel elfordulhasson, ha

a) $M = 2m$;

b) $M = 1{,}4m$?

c) Az *a*), illetve a *b*) esetben mekkora szögelfordulás esetén válik nullává a súrlódási erő?

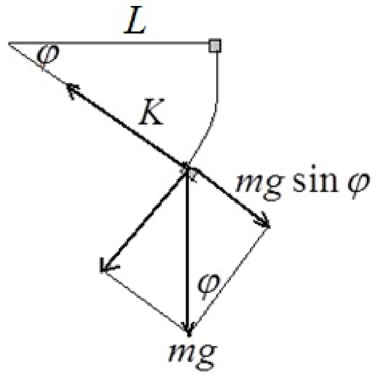
Megoldás

A feltétel akkor valósul meg, ha a fonál lejtővel párhuzamos darabjának hossza nem változik, tehát a lejtőn lévő test sem felfelé, sem lefelé nem csúszik meg. Az m tömegű test L sugarú pályán φ szöggel való elfordulása esetén a fonálerő a mozgásegyenlet szerint

$$K - mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{L}.$$

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter
Nemzeti Tehetség Program



Az elért sebesség a mechanikai energia megmaradásából kapható

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin\varphi.$$

Ezen egyenletek felhasználásával a fonálerő

$$K = 3mg\sin\varphi.$$

Induláskor a fonálerő nulla, ezért a test lejtőn való megcsúszását a tapadási súrlódás akadályozza meg, vagyis

$$Mg\sin\alpha = S \leq \mu Mg\cos\alpha,$$

amiből a jól ismert

$$\mu \geq \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 \tag{1}$$

feltétel adódik. A továbbiakban a K fonálerő növekedése miatt a súrlódási erő csökken, majd nullává válik, ha

$$Mg\sin\alpha = 3mg\sin\varphi,$$

amiből

$$\sin\varphi = \frac{M}{3m}\sin\alpha = \frac{M}{6m}. \tag{2}$$

Ezt követően a tapadási súrlódási erő irányt vált, és az elfordulási szög növekedtével növekedni kezd. Tehát a test felfelé csúszna meg, ha ezt a tapadási súrlódási erő meg nem akadályozná. Ez addig lehetséges, amíg

$$Mg\sin\alpha + S = K,$$
$$S = K - Mg\sin\alpha \leq S_{\max} = \mu Mg\cos\alpha,$$
$$3mg\sin\varphi - Mg\sin\alpha \leq \mu Mg\cos\alpha.$$

Mivel a $\varphi = \alpha$ esetet szeretnénk elérni, ezért

$$3m - M \leq \mu M \cdot \sqrt{3},$$
$$\mu \geq \frac{3m - M}{M\sqrt{3}}.$$

a) Ebben az esetben $M = 2m$, így

$$\mu \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}29.$$

Ennél viszont az (1) feltétel erősebb megkötést jelent, azaz $\mu \geq 0{,}58$.

b) Most $M = 1{,}4m$, tehát

$$\mu \geq \frac{8}{7\sqrt{3}} \approx 0{,}66.$$

Ez most az (1) feltételnél erősebb, azaz most $\mu \geq 0{,}66$.

c) A (2) összefüggés szerint az *a*) esetben

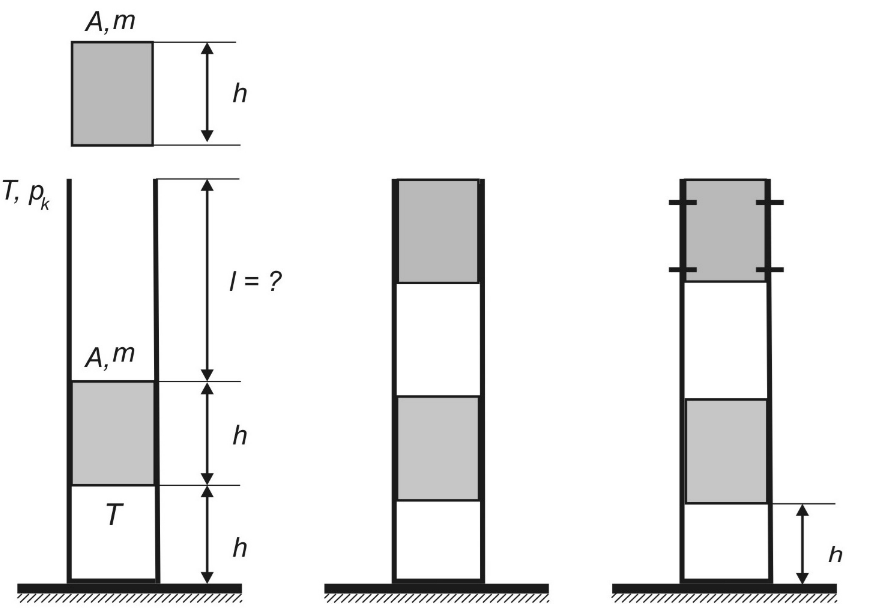
$$\sin\varphi = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \varphi \approx 19{,}5°,$$

míg a *b*) esetben

$$\sin\varphi = \frac{7}{30} \quad \rightarrow \quad \varphi \approx 13{,}5°.$$

2. feladat

Az *ábrán* látható, A keresztmetszet-területű, jó hővezető anyagból készült tartály alsó részében lévő, h magasságú légoszlopot a külső, p_k nyomású levegőtől az $m = p_k A/(2g)$ tömegű, h magasságú, jól záró, könnyen mozgó dugattyú zárja el. A tartályon kívül és belül a hőmérséklet egyaránt $T = 300$ K. A tartály felső részébe, nagyon lassan, egy ugyancsak A keresztmetszet-területű, m tömegű, h magasságú dugattyút helyezünk úgy, hogy a behelyezés közben a felső részből nem tud levegő kiszökni.



a) Mekkora volt kezdetben az alsó dugattyú feletti légoszlop ℓ hossza, ha a felső dugattyú behelyezése után annak felső része pont a henger tetejével került egy magasságba?

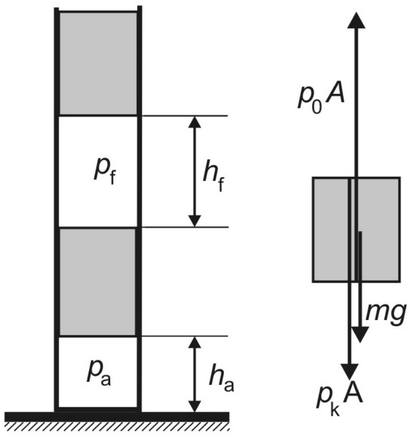
Ezt követően a felső dugattyút rögzítjük.

b) A felső légoszlop hőmérsékletét állandó értéken tartva mennyivel kell megnövelni a tartály alsó részében lévő levegő hőmérsékletét, hogy annak magassága ismét a kezdeti h legyen?

c) Közelítőleg határozzuk meg, hogy mennyi hő közlésére volt szükség a *b*) részben, ha a melegítés hatásfoka 65% volt?

Megoldás

a) A „lassúság" és a jó hővezető anyagból készült tartály miatt az elzárt légoszlopok hőmérséklete állandó, így izoterm folyamatok játszódnak le.



Az alsó részben lévő levegő nyomása kezdetben legyen p_0, a dugattyú behelyezését követően p_a, magassága pedig h_a, így

$$p_0 h = p_\mathrm{a} h_\mathrm{a}. \tag{1}$$

A dugattyú egyensúlya miatt $mg + p_\mathrm{k}A = p_0 A$, amiből a tömegre megadott feltétellel $p_0 = 1{,}5 p_\mathrm{k}$. Ezzel az (1) egyenlet

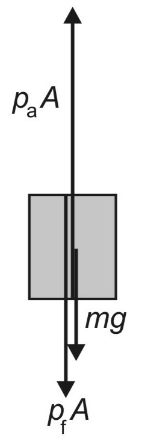
$$1{,}5 p_\mathrm{k} h = p_\mathrm{a} h_\mathrm{a}. \tag{1'}$$

A felső légoszlop nyomása kezdetben p_k. A dugattyú bekerülését követően legyen magassága h_f, nyomása pedig az előző mintájára $p_\mathrm{f} = 1{,}5 p_\mathrm{k}$, így

$$p_\mathrm{k}\ell = p_\mathrm{f} h_\mathrm{f} \quad \rightarrow \quad h_\mathrm{f} = \frac{2}{3}\ell. \tag{2}$$

A felső dugattyú behelyezése után az alsó dugattyú egyensúlya miatt

$$p_\mathrm{f} A + mg = p_\mathrm{a} A,$$



amiből az $mg = 0{,}5p_\mathrm{a}$ és a $p_\mathrm{f} = 1{,}5p_\mathrm{k}$ miatt

$$p_\mathrm{a} = 2p_\mathrm{k}.$$

Ezzel az (1') egyenletből

$$h_\mathrm{a} = \frac{3}{4}h. \tag{1”}$$

A tartály hossza a két esetben azonos, vagyis

$$h + h + \ell = h_\mathrm{a} + h + h_\mathrm{f} + h \quad \rightarrow \quad \ell = h_\mathrm{a} + h_\mathrm{f}.$$

(1”) és (2) egyenletekkel

$$\ell = \frac{3}{4}h + \frac{2}{3}\ell,$$

ahonnan $\ell = \frac{9}{4}h = 2{,}25h$.

b) A felső légoszlop hossza a melegítés végén legyen y, nyomása p. Az *a*) rész eredménye és a (2) kifejezés szerint ennek a folyamatnak a kezdetén a légoszlop hossza $h_\mathrm{f} = 1{,}5h$, nyomása pedig $p_\mathrm{f} = 1{,}5p_\mathrm{k}$. A tartály hosszát ismét két módon felírva

$$\ell + 2h = y + 3h,$$

ahonnan ℓ ismeretében $y = \frac{5}{4}h = 1{,}25h$. A hőmérséklet állandósága miatt

$$1{,}5p_\mathrm{k} \cdot 1{,}5h = p \cdot 1{,}25h,$$

amiből $p = \frac{9}{5}p_\mathrm{k} = 1{,}8p_\mathrm{k}$. Az alsó levegő nyomása a felette lévő levegő nyomásánál mindig $0{,}5p_\mathrm{k}$-val nagyobb, ezért a melegítés végén a nyomása $2{,}3p_\mathrm{k}$, hossza h, hőmérséklete T'. A melegítés kezdetén nyomása $p_\mathrm{a} = 2p_\mathrm{k}$, hossza $h_\mathrm{a} = \frac{3}{4}h = 0{,}75h$, hőmérséklete pedig $T = 300$ K volt. A melegítési folyamatban $pAh/T =$ áll., ezért

$$\frac{2{,}3p_\mathrm{k}h}{T'} = \frac{2p_\mathrm{k} \cdot 0{,}75h}{T}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $T' = 460$ K, vagyis a gáz hőmérsékletét 160 K = 160 °C-kal kellett megemelni.

c) A közölt hő hasznosuló része fedezte a belső energia növekedését és a táguló levegő munkáját

$$Q_{\text{hasznos}} = \Delta E + W_{\text{levegő}}.$$

A belső energia változása

$$\Delta E = \frac{f}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{1{,}5 p_{\text{k}} hA}{300\ \text{K}} \cdot 160\ \text{K} = 2p_{\text{k}} hA,$$

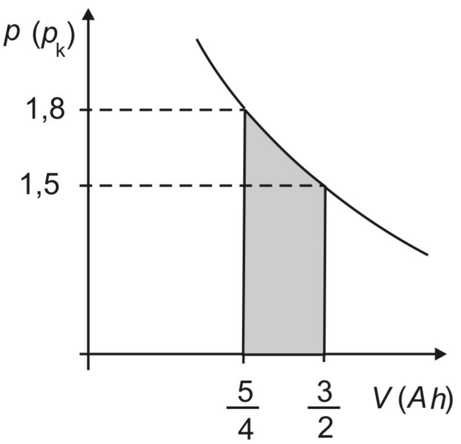
ahol felhasználtuk, hogy kezdetben $p_{\text{k}} hA = nRT$ és azt, hogy a levegő kétatomos molekulákból áll. A levegő által a dugattyúra kifejtett erő

$$F = mg + p_{\text{felül}} A,$$

azaz egy $F_1 = mg$ és egy $F_2 = p_{\text{felül}} A$ nagyságú, felfelé mutató erő eredője. Az eredő erő munkája az egyes tagok munkáinak összege. Így az első tag a dugattyú helyzeti energiájának növekedésével egyezik meg, vagyis

$$W_1 = mg \left(h - \frac{3}{4} h \right) = 0{,}5 p_{\text{k}} A \cdot 0{,}25 h = \frac{1}{8} p_{\text{k}} Ah.$$

A másik tag munkája a felső gáz összenyomása közben végzett munkával egyezik meg, vagyis számértéke a $p-V$ állapotsíkon a folyamatot ábrázoló görbe alatti terület számértékével azonos. A folyamat izoterm volt, képe egy hiperbolaszakasz, mely az *ábrán* látható.



A szóban forgó szakaszon a hiperbola nagyon jó közelítéssel egyenes szakasszal, a síkidom pedig trapézzal közelíthető, így a munka

$$W_2 \approx \frac{1{,}8 + 1{,}5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} \right) p_{\text{k}} Ah = 0{,}4125 p_{\text{k}} Ah.$$

A munka pontos számolással

$$W_2 = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} p_{\text{k}} \cdot \frac{3}{2} Ah \cdot \ln \frac{1{,}5}{1{,}25} \approx 0{,}41022 p_{\text{k}} Ah,$$

ami nagyon közel van az egyenessel megbecsült értékhez. A pontos számolásban felhasználtuk a melegítés kezdete előtti állapotot leíró

$$\frac{3}{2}p_\mathrm{k} \cdot \frac{3}{2}Ah = nRT$$

állapotegyenletet.

Ezzel a hasznos hő

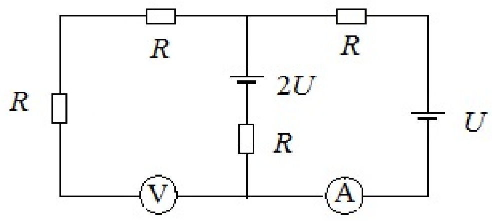
$$Q_\mathrm{hasznos} \approx 2p_\mathrm{k}Ah + \frac{1}{8}p_\mathrm{k}Ah + 0{,}41p_\mathrm{k}Ah = 2{,}54p_\mathrm{k}Ah,$$

és így a befektetett hő ($\eta = 0{,}65$):

$$Q = \frac{Q_\mathrm{hasznos}}{\eta} \approx 3{,}9p_\mathrm{k}Ah.$$

3. feladat

A fizikát szerető Bence egy elektronikai készletet kapott 17. születésnapjára. Tüstént össze is állította az alábbi kapcsolást



Az állandó kapocsfeszültségű áramforrások esetén $U = 30$ V, az ellenállások értéke $R = 100\ \Omega$. A műszerek ideálisnak tekinthetők.

a) Mennyit mutatnak a műszerek?

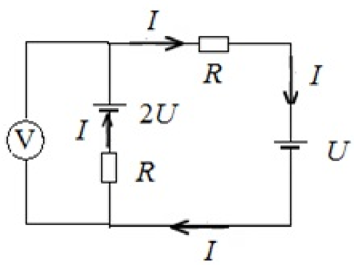
b) Ezt követően felcserélte a műszereket. Mennyit mutatnak azok most?

c) A műszerek univerzálisak lévén, mindkettőt feszültségmérő üzemmódba állította Mennyit mutatnak ekkor a műszerek?

d) Mennyit mutatnak a műszerek, ha mindkettő árammérő üzemmódban működik?

Megoldás

a) A feszültségmérő a nagyon nagy ellenállása miatt szakadást jelent, így az őt tartalmazó ágban nem folyik áram. Az árammérő az igen kis ellenállása miatt egy vezetéknek tekinthető. Így a kapcsolás az ábra szerint alakul.

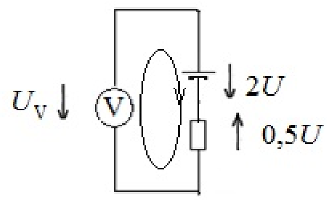


A jobb oldali áramköri részben

$$I = \frac{2U - U}{2R} = \frac{U}{2R} = 0{,}15\ \text{A}$$

erősségű áram folyik, és egyben ennyit mutat az árammérő is. Az R ellenállásokra jutó feszültség egyenként

$$U_R = IR = \frac{U}{2} = 15\ \text{V}.$$

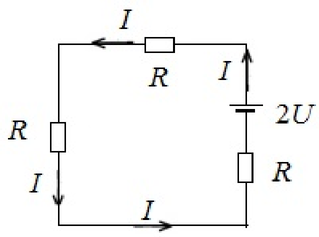


Ennek felhasználásával a feszültségmérő által mutatott U_V érték az *ábrán* felrajzolt hurokra felírt

$$2U + (-0{,}5U) + (-U_\text{V}) = 0$$

egyenlet miatt $U_\text{V} = 1{,}5U = 45$ V.

b) Áram csak a bal oldali körben folyik, így ez a rész az *ábra* szerinti.

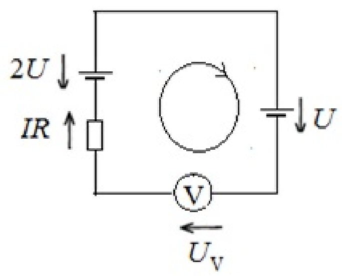


Ezzel az áramerősség

$$I = \frac{2U}{3R} = 0{,}2\ \text{A}.$$

Az árammérő is ennyit mutat.

Az alábbi *ábra* szerinti hurokra a feszültségek előjeles összege nulla.



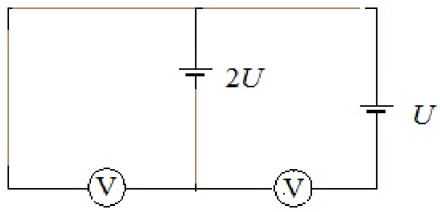
Vagyis

$$-2U + U + U_\mathrm{V} + IR = 0,$$

ahonnan a feszültségmérő által mutatott érték

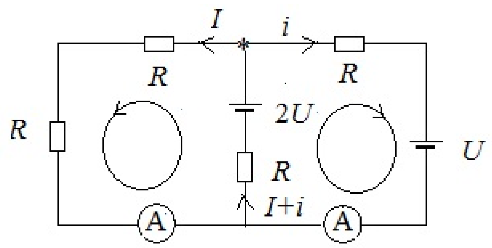
$$U_\mathrm{V} = U - RI = \frac{1}{3}U = 10 \text{ V}.$$

c) Mivel a feszültségmérő ellenállása nagyon nagy, ezért egyik ágban sem folyik áram. Ebben az esetben a kapcsolás egyszerűbben az *ábrának* megfelelő.



A bal oldali műszer $2U = 60$ V-ot jelez, a másik $2U - U = 30$ V-ot.

d) A kapcsolás most az alábbi *ábra* szerinti.



Alkalmazzuk az ábra jelöléseivel a huroktörvényt. Az egyes esetekben kezdjük az előjeles feszültség összegzést a * jelű pontnál, és haladjunk a jelölt irányban.

$$IR + IR + (I + i)R - 2U = 0,$$
$$iR + U + (I + i)R - 2U = 0.$$

Kis alakítás után

$$3IR + iR = 2U,$$
$$IR + 2iR = U.$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$I = \frac{3U}{5R} = 0{,}18 \text{ A},$$

vagyis ennyit mutat a bal oldali műszer. A jobb oldali árammérő pedig

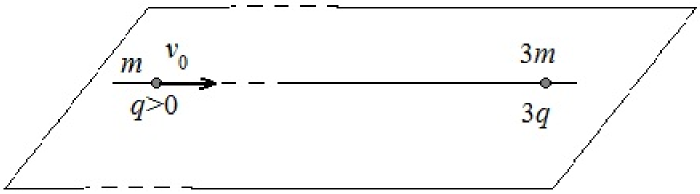
$$i = \frac{U}{5R} = 0{,}06 \text{ A}$$

erősségű áramot jelez.

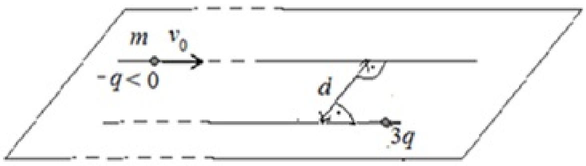
4. feladat

Nagy kiterjedésű, vízszintes, súrlódásmentes, szigetelő síklapon két kísérletet végzünk, amelyekben szigetelőanyagból készült kicsi, pontszerűnek tekinthető gyöngyöket használunk.

a) Az első kísérletben egy m tömegű, $q > 0$ töltésű gyöngyöt nagy távolságból v_0 sebességgel indítva „ütköztetünk” egy kezdetben nyugalomban lévő, $3m$ tömegű, $3q$ töltésű gyönggyel az *ábrának* megfelelően. Határozzuk meg a két gyöngy távolságának minimumát!



b) A második kísérletben is szigetelőanyagból készült kis (pontszerűnek tekinthető) gyöngyöket használunk. Az ábrának megfelelően a $-q$ töltésű, m tömegű gyöngyöt v_0 sebességgel „távolról” indítjuk a rögzített, $3q$ töltésű gyöngy felé. Határozzuk meg a mozgó gyöngy sebességét, amikor legközelebb van a rögzített $3q$ töltésű gyöngyhöz!



A polarizációtól és a gyöngyök közötti gravitációs kölcsönhatástól eltekinthetünk.

Útmutatás: A pontszerű töltések elektromos mezeje nagyon hasonlít a pontszerű testek gravitációs mezejéhez, ezért a gravitációs potenciális energia mintájára képezhető az elektromos potenciális energia.

Megoldás

a) Jelöljük u_1-gyel és u_2-vel a gyöngyök sebességét, d-vel pedig a távolságukat. A külső erők eredője 0, ezért használjuk az impulzusmegmaradás törvényét:

$$mv_0 = mu_1 + 3mu_2.$$

Amikor a két gyöngy legközelebb van egymáshoz, sebességeik nagysága egyenlő ($u_1 = u_2$), így az impulzusmegmaradásra felírt összefüggésből:

$$u_1 = u_2 = \frac{v_0}{4}. \tag{1}$$

Használjuk fel, hogy a konzervatív elektrosztatikus mezőben a nagy távolságból indított gyöngy elektrosztatikus potenciális energiája jó közelítéssel 0, és írjuk fel az „ütközésre” az energiamegmaradás törvényét.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}3mu_2^2 + \frac{3kq^2}{d_{\min}}. \tag{2}$$

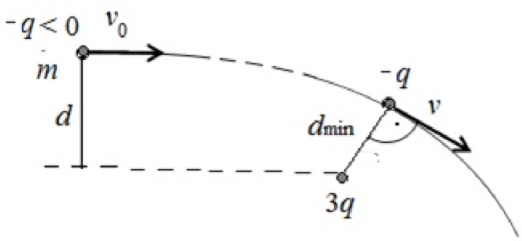
Az (1) és (2) egyenletekből

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_0}{4}\right)^2 + \frac{3kq^2}{d_{\min}}.$$

Amelyből a két gyöngy távolságának a minimuma:

$$d_{\min} = \frac{8kq^2}{mv_0^2}.$$

b) Használjuk ki, hogy a $-q$ töltés a $3q$ töltés centrális erőterében mozog, így felírhatjuk az impulzusmomentum megmaradásának törvényét. Vegyük észre azt, hogy a legközelebbi távolságnál v-nek nem lehet a $3q$ töltés irányába mutató komponense. Írjuk fel az impulzusmomentum-megmaradás és az energiamegmaradás törvényeit.



$$mv_0d = mvd_{\min},$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{k \cdot 3q^2}{d_{\min}} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Ebből a két egyenletből a fizikailag értelmes megoldás

$$v = \frac{\frac{6kq^2}{v_0d} + \sqrt{\left(\frac{6kq^2}{v_0d}\right)^2 + 4m^2v_0^2}}{2m}.$$

Tehát a legközelebbi pontban a $-q$ töltés sebessége:

$$v = \frac{6kq^2 + \sqrt{36k^2q^4 + 4m^2v_0^4d^2}}{2mv_0d}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

	Az m tömegű testre vonatkozó mozgásegyenlet felírása:	2 pont
	A mechanikai energiamegmaradás alkalmazása:	2 pont
	A fonálerő kifejezése az elfordulás szögével:	1 pont
	A lefelé történő megcsúszás megakadályozásához szükséges tapadási súrlódási együttható numerikus megállapítása:	2 pont
	A súrlódásmentes helyzet paraméteres megállapítása:	3 pont
	A felfelé történő megcsúszás megakadályozásához szükséges tapadási súrlódási együttható paraméteres megállapítása:	4 pont
a)	A helyes súrlódási együttható numerikus kiszámítása:	2 pont
b)	A helyes súrlódási együttható numerikus kiszámítása:	2 pont
c)	Az *a*) esetnek megfelelő helyes szög numerikus megállapítása:	1 pont
	A *b*) esetnek megfelelő helyes szög numerikus megállapítása:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Az alsóbb részbeni és a felette lévő részbeni nyomások viszonyának felismerése:	2 pont
	A Boyle–Mariotte-törvény alkalmazása az alsó gázra:	1 pont
	A Boyle–Mariotte-törvény alkalmazása a felső gázra:	1 pont
	A hosszak közötti kapcsolat megállapítása:	1 pont
	A keresett hossz megállapítása:	2 pont
b)	A felső gázoszlop melegítés utáni hosszának megállapítása:	1 pont
	A felső gázoszlop melegítés utáni nyomásának megállapítása:	1 pont
	Az alsó gázoszlopra vonatkozó egyesített gáztörvény felírása:	1 pont
	A keresett hőmérséklet-változás kiszámítása:	1 pont
c)	A belső energia meghatározása az adott paraméterekkel:	2 pont
	Az emelési munka meghatározása az adott paraméterekkel:	1 pont
	A felső gáz összenyomásához szükséges munka becslése (vagy meghatározása) az adott paraméterekkel:	3 pont
	A szükséges hő meghatározása az adott paraméterekkel az első főtétel és a hatásfok alapján:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

	Az ideális árammérő ismerete:	1 pont
	Az ideális feszültségmérő ismerete:	1 pont
a)	A helyes áramerősség meghatározása:	2 pont
	A helyes feszültség meghatározása:	2 pont
b)	A helyes áramerősség meghatározása:	2 pont
	A helyes feszültség meghatározása:	2 pont
c)	A bal oldali feszültségmérő által mutatott érték megállapítása:	1 pont
	A jobb oldali feszültségmérő által mutatott érték megállapítása:	2 pont
d)	A csomóponti törvény helyes alkalmazása:	1 pont
	A bal oldali hurokra vonatkozó egyenlet helyes felírása:	2 pont
	A jobb oldali hurokra vonatkozó egyenlet helyes felírása:	2 pont
	Az egyik műszer által mutatott érték kiszámítása:	1 pont
	A másik műszer által mutatott érték kiszámítása:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	A két töltés mozgásának helyes elképzelése:	1 pont
	Az impulzusmegmaradás tételének felírása:	2 pont
	Annak felismerése, hogy a legkisebb távolságnál a két test sebessége egyenlő:	1 pont
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	2 pont
	A minimális távolság helyes megadása:	2 pont
b)	A $-q$ töltés mozgásának helyes elképzelése:	2 pont
	Annak felismerése, hogy a $-q$ töltés sebességének a legkisebb távolságnál nem lehet a $3q$ töltés irányába mutató komponense:	3 pont
	Az impulzusmomentum-megmaradás tételének helyes felírása:	3 pont
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	2 pont
	A legközelebbi pontban a sebesség értékének helyes megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A fizikailag helytelen gondolatokat tartalmazó egyenletek hibátlan matematikai megoldásáért nem adható pont.