OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

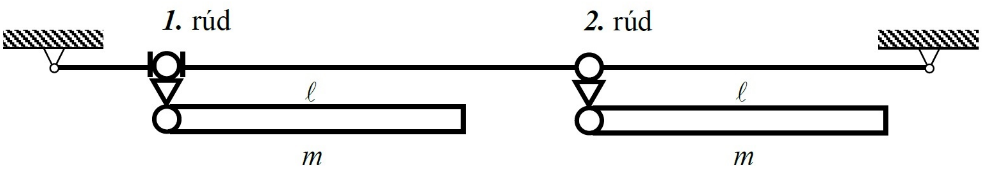
FIZIKA I. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak. Amennyiben valamelyik feladatban szükség van a nehézségi gyorsulás értékére, úgy számoljon $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel!

1. feladat

Két homogén, egyenletes keresztmetszetű, m tömegű, ℓ hosszúságú rudat az egyik végpontjaiknál felfüggesztünk egy vízszintes tartóra. Az ***1.*** rúd vízszintes tengely körül függőleges síkban szabadon foroghat, de a felfüggesztése a tartórúdhoz rögzített. A ***2.*** rúd vízszintes tengely körül függőleges síkban szabadon foroghat, és felfüggesztése a vízszintes tartón súrlódás nélkül elmozdulhat.



a) A rudakat vízszintes helyzetből lökésmentesen elengedjük. Mekkora erővel terhelik függőleges helyzetben az egyes rudak a felfüggesztési pontokat?

b) Határozzuk meg a rudak szögsebességeinek arányát abban a helyzetben, amelyben azok kiinduló helyzetükhöz viszonyított szögelfordulása α!

Megoldás

a) ***1.*** rúd

A mechanikai energiamegmaradás tételét használva meghatározhatjuk a rúd szögsebességét. Jelölje A a rúd felfüggesztésnél lévő végpontját. Használjuk fel, hogy a tömegközéppont $\ell/2$-vel kerül mélyebbre, továbbá a rúdra merőleges, a végpontján átmenő tengelyre a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_\mathrm{A} = \frac{1}{3}m\ell^2$. Tehát

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\Theta_\mathrm{A}\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}m\ell^2\omega_1^2,$$

amelyből

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}. \tag{1}$$

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja.

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

Jelölje F_1 a tengely által a rúdra kifejtett erőt. Írjuk fel a tömegközéppontra a dinamika alapegyenletét:

$$F_1 - mg = m\frac{\ell}{2}\omega_1^2. \tag{2}$$

(1) és (2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_1 = \frac{5}{2}mg.$$

Ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erő terheli a felfüggesztési pontot.

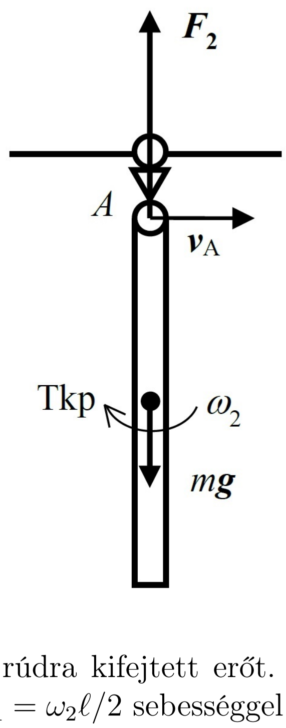
2. rúd

A rúdra ható külső erők eredője függőleges irányú, ezért a tömegközéppont vízszintes irányban nem mozdul el, így függőleges helyzetben a rúd mozgási energiája a tömegközéppont körüli forgási energiájával egyenlő. Használjuk fel ismét a mechanikai energiamegmaradás tételét.

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{Tkp}}\omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}m\ell^2\omega_2^2,$$

amelyből a tömegközéppont körüli forgás szögsebessége:

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{3g}{\ell}}. \tag{3}$$



Jelölje F_2 a tengely által a rúdra kifejtett erőt. Írjuk fel a tömegközéppontra a rúd felső pontjához rögzített, $v_\mathrm{A} = \omega_2\ell/2$ sebességgel mozgó koordináta-rendszerben a dinamika alapegyenletét (ez a pont a rúd függőleges helyzetében nem gyorsul):

$$F_2 - mg = m\frac{\ell}{2}\omega_2^2. \tag{4}$$

(3) és (4) felhasználásával kapjuk, hogy

$$F_2 = 7mg.$$

Ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erő terheli a felfüggesztési pontot.

b) ***1.*** rúd

Írjuk fel a mechanikai energiamegmaradás tételét a szögsebesség szögfüggésének meghatározásához:

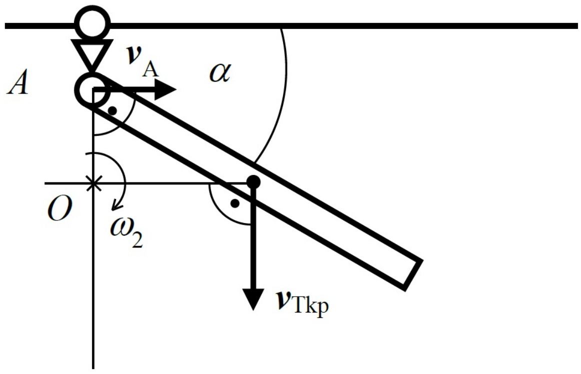
$$mg \cdot \frac{\ell}{2} \sin\alpha = \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{A}}\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m\ell^2\omega_1^2,$$

amelyből

$$\omega_1(\alpha) = \sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{\ell}}.$$

2. rúd

Határozzuk meg az α szögkitérésű helyzetben a pillanatnyi forgástengelyt. A rúd A pontjának sebessége a kényszerfeltétel miatt vízszintes irányú. A tömegközéppont vízszintes irányba nem mozdul el, sebessége függőleges irányú. $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ és $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Tkp}}$ kezdőpontjában a vektorokra állított merőleges egyenesek metszéspontja adja a pillanatnyi forgástengely *ábrán* látható O helyét.



Használjuk a mechanikai energiamegmaradás tételét:

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} \sin\alpha = \frac{1}{2}\Theta_{\mathrm{O}}\omega_2^2.$$

A pillanatnyi forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével határozhatjuk meg.

$$\Theta_{\mathrm{O}} = \Theta_{\mathrm{Tkp}} + md^2,$$

ahol $d = \frac{\ell}{2}\cos\alpha$ a két forgástengely távolsága. A fentiek felhasználásával:

$$mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\cos\alpha\right)^2\right]\omega_2^2,$$

ahonnan

$$\omega_2(\alpha) = 2\sqrt{\frac{3g\sin\alpha}{\ell\left(1+3\cos^2\alpha\right)}}.$$

A szögsebességek aránya α szögkitérésnél:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}}{2}.$$

2. feladat

Egy vízszintes tengelyű, nagyon jó hővezető anyagból készült henger egyik vége zárt, a másik végét egy igen könnyen mozgó dugattyú zárja el a 101,3 kPa nyomású környezettől. A hengerbe korábban annyi vizet juttattunk, hogy annak egy része mindig folyadék állapotú.

a) Hányszorosára változik a henger dugattyú által elzárt térfogata, ha a környezet hőmérséklete lassan 35 °C-ról 20 °C-ra csökken?

b) Hányszorosára változik a henger dugattyú által elzárt térfogata, ha a környezet hőmérséklete lassan 35 °C-ról 50 °C-ra nő?

c) Adjunk becslést arra vonatkozóan, hogy mekkora hőmérsékletre kell melegednie a környezetnek 35 °C-ról, hogy a henger térfogata kétszeresre növekedjen!

Útmutatás: A hengerben uralkodó p nyomás megegyezik a benne lévő levegő p_1 és vízgőz p_2 nyomásának összegével. A levegő-vízgőz keverék összetevőinek p_1 és p_2 nyomásai akkorák, mint amit akkor fejtenének ki, ha ugyanazon a hőmérsékleten egyedül töltenék ki a teljes térfogatot.

Megoldás

Szükségünk van az adott hőmérsékletű telített gőz nyomására:

hőmérséklet	táblázat adata	kerekített adat
$T_1 = 35$ °C	5619 Pa	$p_{g1} = 5620$ Pa
$T_2 = 20$ °C	2334 Pa	$p_{g2} = 2330$ Pa
$T_3 = 50$ °C	12336 Pa	$p_{g3} = 12340$ Pa

A hengerbe zárt levegő nyomása az adott hőmérsékleteken: $p_{\text{levegő}} = p_0 - p_{\text{gőz}}$, ahol $p_0 = 101{,}3$ kPa.

$T_1 = 35$ °C	$p_{l1} = 95680$ Pa
$T_2 = 20$ °C	$p_{l2} = 98970$ Pa
$T_3 = 50$ °C	$p_{l3} = 88960$ Pa

a) Írjuk fel a levegő első állapotváltozására az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_{l1}V_1}{T_1} = \frac{p_{l2}V_2}{T_2},$$

ahonnan

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_{l1}T_2}{p_{l2}T_1} \approx 0{,}92.$$

b) Írjuk fel a levegő második állapotváltozására az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_{l1}V_1}{T_1} = \frac{p_{l3}V_3}{T_3},$$

ahonnan

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_{l1}T_3}{p_{l3}T_1} \approx 1{,}13.$$

c) Írjuk fel a levegő harmadik állapotváltozására az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_{l1}V_1}{T_1} = \frac{p_{l4}V_4}{T_4}.$$

Használjuk ki, hogy a végállapot térfogata kétszerese a kiindulásinak:

$$\frac{p_{l1}}{T_1} = \frac{2p_{l4}}{T_4}.$$

A megadott adatokkal az egyenlet bal oldalát ki tudjuk számítani:

$$\frac{p_{l1}}{T_1} \approx 310{,}7\ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{K}}.$$

Az egyenlet jobb oldalát a függvénytáblázat adatainak felhasználásával keressük meg. Ennek segítségével a következő táblázatot adhatjuk meg (kerekített értékekkel):

T_4 (K)	$p_{\text{gőz}}$ (Pa)	$p_{\text{levegő}}$ (Pa)	$\frac{2p_{l4}}{T_4}$ (Pa/K)
328	15740	85560	521,7
338	25000	76300	451,5
348	38550	62750	360,6
353	**47360**	**53940**	**305,6**
358	57800	43500	243,0

A táblázat adatai alapján elmondható, hogy a keresett hőmérséklet kicsivel 353 K alatt lehet, azaz nagyjából 79-80 °C.

3. feladat

Homogén mágneses térben v_0 sebességgel egyenletes körmozgást végez egy kicsiny, pozitív elektromos töltésű részecske. A mágneses teret egy szolenoid (hosszú egyenes tekercs) hozza létre, amelynek tengelye áthalad a körpálya középpontján.

a) Hányszorosára változik a körpálya sugara, ha mágneses indukció értékét nagyon rövid idő alatt a felére csökkentjük?

Egy másik alkalommal a mágneses indukció értékét egészen zérusig csökkentjük szintén nagyon rövid idő alatt.

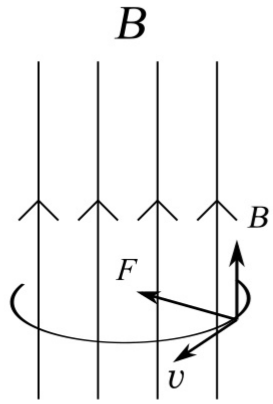
b) Mekkora lesz a részecske sebessége a folyamat végén?

A gravitációs hatásoktól tekintsünk el.

Megoldás

A részecske tömegét jelöljük m-mel, elektromos töltését Q-val. A homogén tér kezdeti mágneses indukcióját jelöljük B_0-lal. A megoldásban egy fizikai mennyiség megváltozása alatt annak abszolút értékét értjük.

a) Amikor a mágneses indukció értéke B_0, az egyenletes körmozgás dinamikai feltételét felhasználva (lásd az *ábrát*):



$$\sum F = Qv_0B_0 = m\frac{v_0^2}{R_1} \quad \rightarrow \quad R_1 = \frac{mv_0}{QB_0}.$$

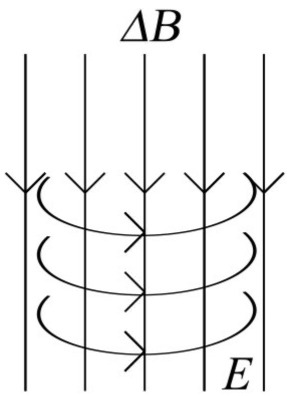
Ismert, hogy az időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre maga körül. Az időben változó mágneses tér olyan (örvényes) elektromos teret kelt, melynek U körfeszültségét a mágneses fluxus időbeli változási gyorsasága határozza meg:

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Általános esetben ezzel a törvénnyel az elektromos térerősséget nem tudjuk meghatározni. Azonban mivel a szolenoid belsejében lévő mágneses mező hengerszimmetrikus, az indukálódó elektromos tér is ugyanezzel a szimmetriával rendelkezik, azaz a szolenoid tengelye körül vett, bizonyos R sugarú kör mentén az elektromos térerősség nagysága állandó, iránya pedig érintőirányú. Tehát a körfeszültség:

$$U = E \cdot 2R\pi = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot R^2\pi \quad \rightarrow \quad E = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Az indukált elektromos mező az elképzelt zárt vezetőkörben olyan irányú áramot keltene, amelynek saját mágneses tere ellentétes irányú az őt keltő mágneses fluxusváltozással. (Lenz-törvény) Tehát az indukált elektromos térerősség és a mágneses fluxusváltozás balsodrású rendszert alkot (lásd az *ábrát*), a részecske *lassulni fog.*



A mágneses indukció megváltozásának rövid időtartama alatt a keletkező elektromos tér erőlökést fejt ki a részecskére. Alkalmazzuk a lendülettételt:

$$EQ \cdot \Delta t = m\Delta v.$$

E fenti alakjával

$$\frac{R}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot Q\Delta t = m\Delta v,$$

amiből a részecske sebességcsökkenésének mértéke:

$$\Delta v = \frac{QR}{2m}\Delta B. \tag{1}$$

Tehát mialatt a mágneses indukció a kezdeti érték felére csökken, a részecske sebességének csökkenése:

$$\Delta v = \frac{QRB_0}{4m}.$$

A részecske új sebessége a mágneses indukció pillanatszerű megváltozását követően:

$$v = v_0 - \Delta v = \frac{QRB_0}{m} - \frac{QRB_0}{4m} = \frac{3QRB_0}{4m}.$$

A részecske pályájának új sugara:

$$R_2 = \frac{mv}{QB} = \frac{\frac{3}{4}mv_0}{Q\frac{B_0}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{mv_0}{QB_0} = \frac{3}{2}R_1.$$

Másfélszeresére nő a részecske pályájának sugara, midőn a mágneses indukció értékét nagyon rövid idő alatt a felére csökkentjük.

b) Most is alkalmazhatjuk a lendülettételt. Ekkor az (1) kifejezést kapjuk ismét. Jelen esetben $\Delta B = B_0$, azaz a sebesség csökkenésének mértéke:

$$\Delta v^* = \frac{QRB_0}{2m},$$

vagyis a részecske új sebessége:

$$v^* = v_0 - \Delta v^* = \frac{QRB_0}{2m} = \frac{1}{2}v_0.$$

A részecske sebessége felére csökken a mágneses indukció teljes eltűnéséig.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	***1.*** rúd	
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	1 pont
	A szögsebesség helyes meghatározása:	1 pont
	A dinamika alapegyenletének helyes felírása:	1 pont
	A felfüggesztési pontot terhelő erő helyes megadása:	1 pont
	2. rúd	
	Annak a felismerése, hogy a tömegközéppont csak függőleges irányban mozdul el:	1 pont
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	2 pont
	A szögsebesség helyes meghatározása:	1 pont
	A dinamika alapegyenletének helyes felírása a v_A sebességgel mozgó koordináta-rendszerben:	2 pont
	A felfüggesztési pontot terhelő erő helyes megadása:	1 pont
b)	***1.*** rúd	
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	1 pont
	A szögsebesség helyes meghatározása:	1 pont
	2. rúd	
	A pillanatnyi forgástengely helyének helyes meghatározása:	2 pont
	A pillanatnyi forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomaték helyes meghatározása:	2 pont
	Energiamegmaradás tételének helyes felírása:	1 pont
	A szögsebesség helyes meghatározása:	1 pont
	A szögsebességek arányának helyes megadása:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

	A három hőmérséklethez tartozó telített gőz, illetve az elzárt levegő nyomásának kigyűjtése:	3 pont
a)	Az egyesített gáztörvény alkalmazása:	3 pont
	A keresett térfogatarány megadása:	3 pont
b)	Az egyesített gáztörvény alkalmazása:	2 pont
	A keresett térfogatarány megadása:	2 pont
c)	Az egyesített gáztörvény alkalmazása:	3 pont
	Annak felismerése, hogy a függvénytáblázat adatainak felhasználásával érdemes egy táblázatot készíteni, és így egy közelítő megoldást adhatunk:	2 pont
	A keresett hőmérséklet közelítő értékének megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A dinamika alapegyenletének alkalmazása az egyenletes körmozgást végző töltött részecskére:	2 pont
	Annak ismerete, hogy az időben változó mágneses tér elektromos teret hoz létre maga körül:	3 pont
	Az indukált elektromos tér térerősségének kifejezése, hivatkozás a szimmetriára:	2 pont
	Annak felismerése, hogy a részecske lassulni fog:	2 pont
	Annak észrevétele, hogy a lendülettételt szükséges alkalmazni:	3 pont
	A pillanatszerű gyorsítás hatására a részecske új sebességének meghatározása:	2 pont
	Az új pályasugár megadása:	2 pont
b)	A lendülettétel újbóli alkalmazása:	2 pont
	A részecske új sebességének megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A fizikailag helytelen gondolatokat tartalmazó egyenletek hibátlan matematikai megoldásáért nem adható pont.