OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

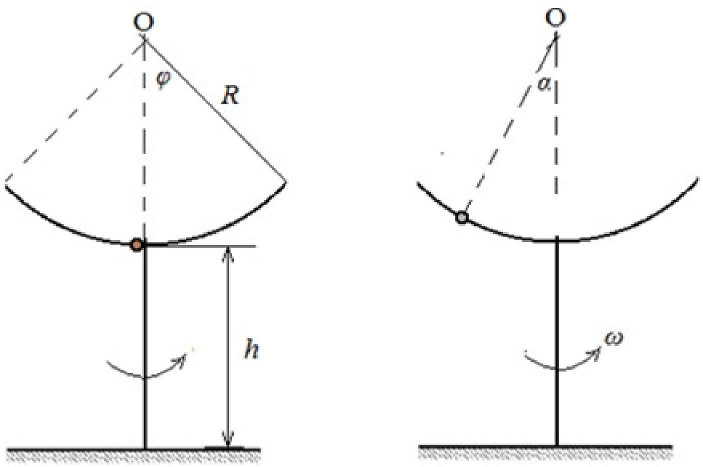
FIZIKA I. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak. Amennyiben valamelyik feladatban szükség van a nehézségi gyorsulás értékére, úgy számoljon $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel!

1. feladat

Az *ábrán* látható módon egy $R = 20$ cm sugarú, O középpontú, $\varphi = 45°$ fél nyílásszögű, körív alakú, merev drótra egy pontszerűnek tekinthető gyöngy van fűzve. A drót és a gyöngy között a súrlódás elhanyagolható. A drót közepe a vízszintes talaj fölött $h = 40$ cm magasságban csatlakozik egy függőleges tengelyhez, amely körül különböző szögsebességgel foroghat.



a) Mekkora ω szögsebességgel kell forgatni a drótot, hogy a gyöngy szögkitérése tartósan α legyen? Mekkora ez a szögsebesség kis α szögek esetén?

b) A forgás szögsebességét *igen lassan* növelve a tengelytől mekkora távolságra ér talajt a gyöngy?

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

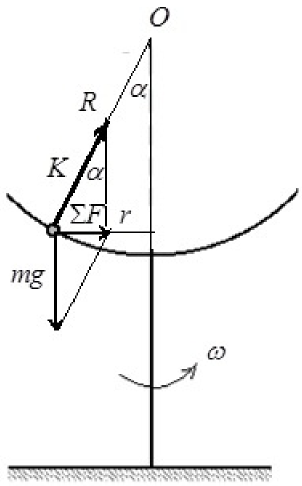
Megoldás

a) Tetszőleges (nullától különböző α) egyensúlyi szög esetén felírható a gyöngyre, hogy

$$\sum F = mr\omega^2,$$

ahol ω a szögsebesség, $r = R\sin\alpha$ pedig a gyöngy körpályájának sugara. A gyöngyre ható eredő erő az *ábra* alapján

$$\sum F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$



Az eddigi egyenletekből kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}},$$

ami kicsiny α szögek esetén

$$\omega \approx \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 7\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés: Ez azt jelenti, hogy kb. $7\ \mathrm{s}^{-1}$ szögsebességig a gyöngy nem hagyja el a tengely melletti helyzetét.

b) A gyöngy a drótot $\alpha = \varphi = 45°$ szög esetén hagyja el, vagyis

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos 45°}} \approx 8{,}33\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

ahonnan a gyöngy kerületi sebessége $v = \omega R\sin 45° \approx 1{,}18$ m/s. A test további mozgása egy vízszintes hajítás. A kezdőmagasság $h_0 = h + R(1-\cos 45°) \approx 0{,}459$ m, így a test $t = \sqrt{2h_0/g} \approx 0{,}306$ s ideig repül, miközben $x = vt \approx 0{,}361$ m vízszintes távolságot tesz meg. Vagyis a tengelytől mért távolság Pithagorasz-tétel segítségével:

$$d = \sqrt{x^2 + (R\sin 45°)^2} \approx 0{,}39\ \mathrm{m} \approx 0{,}4\ \mathrm{m}.$$

2. feladat

Egy homogén tömegeloszlású, gömb alakú exobolygó 16 óra alatt fordul meg a tengelye körül. Egyenlítőjén a nehézségi gyorsulás értéke 25%-kal kisebb, mint a sarkokon.

a) Mekkora a bolygó felszínéhez igen közeli körpályán keringő mesterséges hold keringési ideje?

b) Hány százaléka a nehézségi gyorsulás a sarkinak a harmincadik szélességi körön?

Megoldás

a) A forgó égitestek felszínén nyugvó testre két erő hat. A bolygó vonzásából származó $\underline{F}_{\text{grav.}}$ gravitációs erő és a bolygótól származó nyomóerő. Ez a nyomóerő mg nagyságú és iránya ellentétes $m\underline{g}$ irányával, ahol g az adott helyi nehézségi gyorsulás nagysága. A két erő eredője biztosítja azt, hogy a test a bolygóval együtt forog:

$$\underline{F}_{\text{grav.}} - m\underline{g} = m\underline{a}_{\text{cp}},$$

amely átrendezve

$$\underline{F}_{\text{grav.}} = m\underline{a}_{\text{cp}} + m\underline{g}. \tag{1}$$

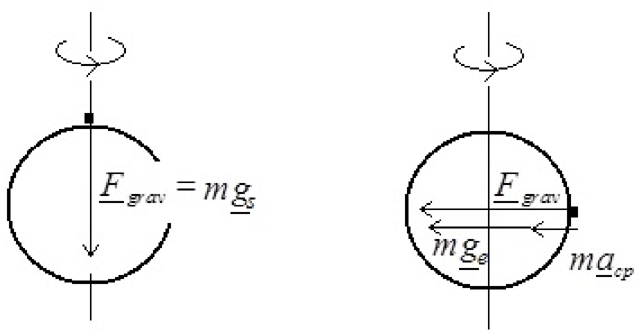
A szokásos jelöléseket alkalmazva a gravitációs erő nagysága esetünkben

$$F_{\text{grav.}} = \frac{\gamma m M}{R^2}.$$

A sarkokon a centripetális gyorsulás nulla, ezért itt

$$F_{\text{grav.}} = \frac{\gamma m M}{R^2} = mg_{\text{s}} = mg.$$

A továbbiakban a sarki nehézségi gyorsulást g-vel jelöljük.



Az egyenlítőn (1) alakja

$$F_{\text{grav.}} = ma_{\text{cp}} + mg_{\text{e}},$$

vagyis

$$mg = ma_{\text{cp}} + 0{,}75mg,$$

$$ma_{\text{cp}} = 0{,}25mg = \frac{\gamma m M}{4R^2}.$$

A bolygó T_B forgási periódusidejét felhasználva

$$ma_\mathrm{cp} = mR\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{B}}\right)^2,$$

azaz

$$mR\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\gamma mM}{4R^2}. \tag{2}$$

A mesterséges hold keresett T_H keringési idejével a hold mozgásegyenlete

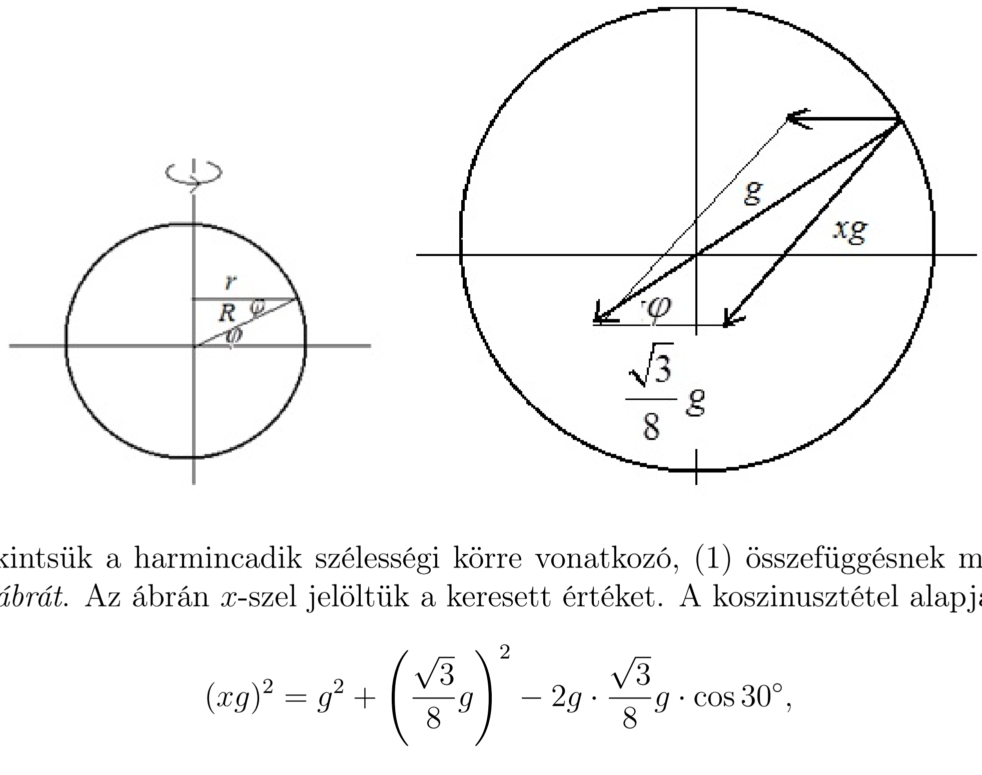
$$mR\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{H}}\right)^2 = \frac{\gamma mM}{R^2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletek hányadosából

$$T_\mathrm{H} = \frac{1}{2}T_\mathrm{B} = 8 \text{ óra}.$$

b) A $\varphi = 30°$-os szélességi körön a bolygó forgásából adódó centripetális gyorsulás

$$a_\mathrm{cp}(\varphi) = r\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{B}}\right)^2 = R\cos\varphi\cdot\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{B}}\right)^2 = a_\mathrm{cp}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}a_\mathrm{cp} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4}g = \frac{\sqrt{3}}{8}g.$$



Tekintsük a harmincadik szélességi körre vonatkozó, (1) összefüggésnek megfelelő *vektorábrát*. Az ábrán x-szel jelöltük a keresett értéket. A koszinusztétel alapján

$$(xg)^2 = g^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{8}g\right)^2 - 2g\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}g\cdot\cos 30°,$$

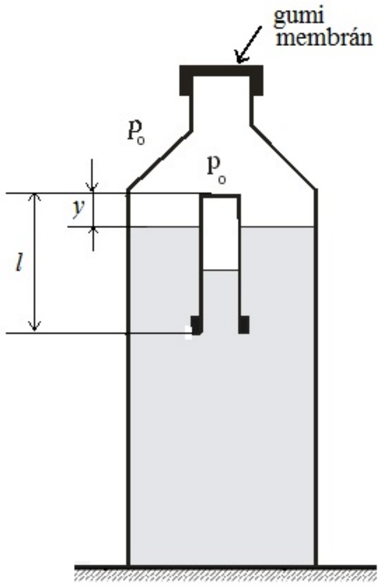
ahonnan

$$x^2 = 1 + \frac{3}{64} - \frac{3}{8} = \frac{43}{64},$$

amelyből $x \approx 0{,}82$. Tehát a harmincadik szélességi körön a nehézségi gyorsulás nagyjából 82%-a sarkinak.

3. feladat

Egy $\ell = 12$ cm hosszú, állandó keresztmetszetű, $d = 1{,}8$ cm átmérőjű, elhanyagolható falvastagságú, alul gyűrű alakú, kicsiny, elhanyagolható térfogatú fémnehezékkel ellátott, összesen $m = 10$ g tömegű, lefelé fordított, lapos végű kémcső az *ábrán* látható módon $y = 0{,}6$ cm függőleges kilógással úszik a vízen. A külső légnyomás, illetve kezdetben a merev falú tartályban a kémcsövön kívüli levegő nyomása egyaránt $p_0 = 101$ kPa. Ha a tartály tetején lévő gumimembrán megnyomásával megnöveljük a nyomást, a kémcső – melyet ilyen esetben szokás Cartesius-búvárnak nevezni – lefelé mozdul. Tekintsünk el a felületi feszültség hatásától, a vízgőz jelenlététől, illetve a hőmérséklet változásától.



a) Határozzuk meg a kémcsőbe bezárt levegőoszlop kezdeti hosszát!

b) Mekkora minimális túlnyomást kell a membránnal létrehozni a tartályban, hogy a „búvárt” teljesen ellepje a víz?

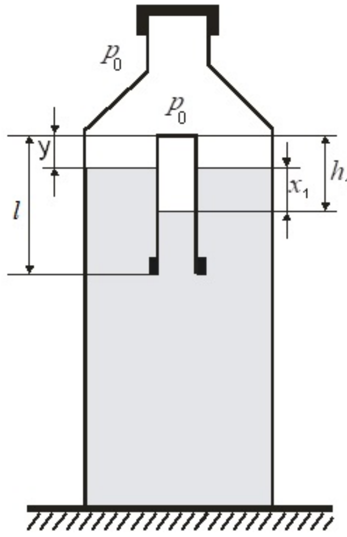
c) Legalább mekkora legyen a vízoszlop magassága, hogy 20 kPa túlnyomás esetén, annak megszüntetése után a búvár már ne tudjon visszatérni a tartály aljáról a felszínre?

Megoldás

a) Legyen x_1 a levegőoszlop vízbe merült része normál légköri nyomás esetén. A kémcső egyensúlya miatt:

$$mg = \varrho g A x_1,$$

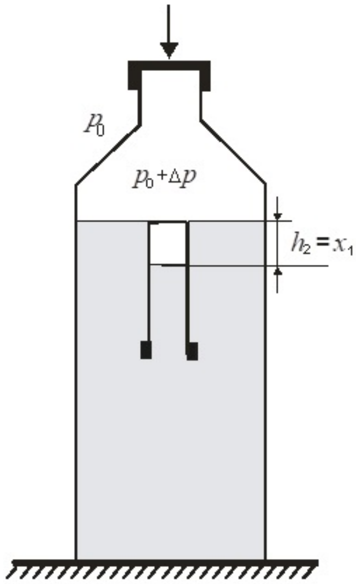
ahol ϱ a víz sűrűsége, $A = d^2\pi/4$ a kémcső keresztmetszet-területe. Innen $x_1 \approx 3{,}93$ cm, illetve a levegőoszlop magasságára $h_1 \approx y + x_1 = 4{,}53$ cm adódik.



b) Ha a víz a kémcsövet éppen elfedi, és egyensúlyban van, akkor az előbbi egyenlet most is érvényes, azaz a levegőoszlop hossza $h_2 = x_1 \approx 3{,}93$ cm. A kémcsőbe zárt levegőre alkalmazhatjuk a Boyle–Mariotte-törvényt

$$(p_0 + \varrho g x_1)Ah_1 = (p_0 + \Delta p + \varrho g x_1)Ah_2,$$

ahonnan a Δp túlnyomás meghatározható. Numerikusan $\Delta p \approx 15{,}5$ kPa.



c) Legyen D a légoszlop aljának mélysége a túlnyomás megszüntetésének pillanatában. Ha ekkor a kémcső már nem tér vissza a felszínre, akkor

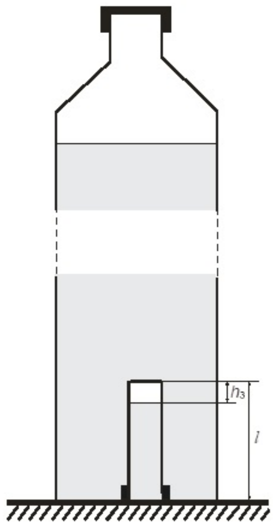
$$mg \geq \varrho g A h_3,$$

ahol Ah_3 a kémcsőbe zárt levegő térfogata. Felhasználva a Boyle–Mariotte-törvényt:

$$(p_0 + \varrho g x_1)Ah_1 = (p_0 + \varrho g D)Ah_3.$$

A fentiekből $D \geq 1{,}62$ m, vagyis a vízoszlop legkisebb magassága, amikor $h_3 = x_1$:

$$H_{\min} = D_{\min} + \ell - h_3 \approx 1{,}7 \text{ m}.$$



4. feladat

Egy igen hosszú szigetelőszál egyik végét R sugarú félkörívben meghajlítjuk, majd síkját függőleges helyzetbe hozzuk. A kör O középpontja alatt a szálra felfűzött, m tömegű ponttöltés nyugszik. A szál egyenes végére egy másik, szintén m tömegű – az eredetivel azonos előjelű – ponttöltést fűzünk, majd igen lassan addig a pontig mozgatjuk azt, ahol az eredeti töltés kezdetben volt. Eközben az eredeti töltés a köríven R magasságba jut. A súrlódástól eltekintünk.

a) Mekkora munkát végeztünk a folyamat során?

b) Adott pillanatban a távoli pontból behozott töltést elengedjük. Határozzuk meg a két töltésből álló rendszer tömegközéppontjának gyorsulását az elengedés pillanatában!

Útmutatás: A pontszerű töltések által létrehozott elektromos mező nagyon hasonlít a pontszerű testek gravitációs mezőjéhez, ezért a gravitációs potenciális energia mintájára képezhető az elektromos potenciális energia.

Megoldás

a) Amikor a köríven mozgó töltés R magasságba jut, a töltések között ható elektrosztatikus taszítóerő

$$F = \frac{kQ_1Q_2}{(R\sqrt{2})^2}, \tag{1}$$

A töltés egyensúlyban van, ezért függőleges irányban (az *ábra* alapján)

$$F \sin\alpha = mg.$$

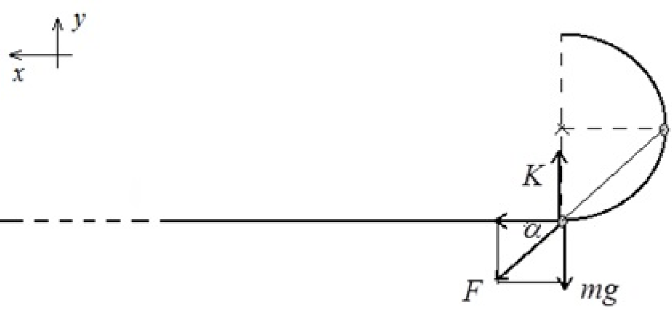
Felhasználva az (1) egyenletet, és hogy $\alpha = 45°$:

$$kQ_1Q_2 = 2\sqrt{2}mgR^2 \tag{2}$$

adódik. A töltésmozgatás során végzett munka az elektrosztatikus potenciális energia növelésére, illetve a nehézségi erőtérbeli potenciális energia növelésére fordítódik, azaz:

$$W = \frac{kQ_1Q_2}{R\sqrt{2}} + mgR = 3mgR.$$

b) A felső (1-gyel jelölt) töltésre ható erők az alsó (2-vel jelölt) töltés elengedése utáni pillanatban még nem változnak meg, ezért a felső töltés gyorsulása $\boldsymbol{a}_1 = 0$.



Az alsó töltés függőleges irányban nem gyorsul, hiszen fel van fűzve a szálra, azaz $a_{2y} = 0$. Vízszintes irányban viszont

$$F \cos \alpha = m a_{2x}.$$

Felhasználva az (1) és (2) kifejezéseket, valamint hogy $\alpha = 45°$:

$$a_{2x} = g.$$

Tehát a rendszer tömegközéppontjának gyorsuláskomponensei:

$$a_x^{\mathrm{TK}} = \frac{a_{x1} + a_{x2}}{2} = \frac{g}{2},$$
$$a_y^{\mathrm{TK}} = \frac{a_{y1} + a_{y2}}{2} = 0.$$

Vagyis a tömegközéppont gyorsulása $g/2$ nagyságú és vízszintes irányú.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Az α szögkitéréssel forgó gyöngyre ható erők eredőjének meghatározása mg segítségével:	3 pont
	Szögsebesség meghatározása α függvényében:	3 pont
	A szögsebesség értékének meghatározása kis α szögek esetére:	2 pont
b)	Az $\alpha = \varphi = 45°$ esetén szükséges szögsebesség meghatározása:	1 pont
	A 45°-os szögkitéréshez tartozó kerületi sebesség meghatározása:	2 pont
	A drót maximális magasságnak meghatározása:	3 pont
	A gyöngy levegőben töltött idejének meghatározása:	2 pont
	A gyöngy vízszintes elmozdulásának meghatározása:	1 pont
	A becsapódás tengelytől mért helyének kiszámítása:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A nehézségi erő és a gravitációs erő kapcsolatának ismerete:	2 pont
	A nehézségi erő és a gravitációs erő kapcsolata a sarkokon:	1 pont
	A nehézségi erő és a gravitációs erő kapcsolata az egyenlítőn:	2 pont
	A hold mozgásegyenlete:	1 pont
	Az egyenlítő egy pontja centripetális gyorsulásának helyes felírása a bolygó tengely körüli forgási idejével:	1 pont
	A mesterséges hold centripetális gyorsulásának helyes felírása a keringési idejével:	1 pont
	A mesterséges hold keringési idejének helyes meghatározása:	3 pont
b)	A centripetális gyorsulás a 30. szélességi körön a sarki g-vel kifejezve:	2 pont
	A keresett és a sarki nehézségi gyorsulás kapcsolata a vektorábra alapján:	3 pont
	A koszinusztétel helyes alkalmazása:	2 pont
	A keresett %-os érték helyes megállapítása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A kémcső egyensúlyi feltételének felírása a kiszorított vízoszlop magasságának felhasználásával:	2 pont
	A levegőoszlop hosszának meghatározása:	2 pont
b)	Annak felismerése, hogy a levegőoszlop magassága ez esetben megegyezik a kiszorított vízoszlop magasságával:	2 pont
	A Boyle–Mariotte-törvény felírása a kezdeti és a *b*) részben vizsgált állapotok között:	2 pont
	A kémcsőben lévő levegőoszlopok nyomására helyesen felírt összefüggések a mélység és a külső nyomások felhasználásával:	1+1 pont
	A szükséges túlnyomás meghatározása:	2 pont
c)	A túlnyomás megszüntetése után a kémcső tartály alján maradásának dinamikai feltétele:	2 pont
	A levegőoszlop kritikus magasságának meghatározása:	2 pont
	A levegőoszlop alja minimális D mélységének meghatározása:	2 pont
	A tartályban levő teljes vízoszlop minimális mélységének meghatározása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	A felső töltésre ható erőrendszer értelmezése:	1 pont
	A Coulomb-törvény felírása:	2 pont
	A felső töltés erőegyensúlyának felírása (függőleges irány):	2 pont
	Az elektrosztatikus mennyiségek kapcsolata mg-vel:	2 pont
	A munka helyes értelmezése (elektrosztatikus+nehézségi):	2 pont
	A munka helyes megadása:	1 pont
b)	Annak felismerése, hogy a felső töltésre ható erők nem változnak meg pillanatszerűen:	1 pont
	A fenteikből kifolyólag annak megállapítása, hogy a felső töltés gyorsulása zérus:	1 pont
	Annak megállapítása, hogy az alsó töltés függőleges gyorsulása zérus:	1 pont
	Helyes mozgásegyenlet az alsó töltésre:	2 pont
	Az alsó töltés vízszintes gyorsulásának megadása:	1 pont
	A TKP gyorsulásának és a töltések gyorsulásainak kapcsolata:	2 pont
	A helyes végeredmény:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A fizikailag helytelen gondolatokat tartalmazó egyenletek hibátlan matematikai megoldásáért nem adható pont.