OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

FIZIKA II. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Űrtávcsővel végzett mérések adatai alapján megállapítható egy távoli csillag és egyetlen bolygója közötti r távolság, valamint a bolygó T keringési ideje. Spektroszkópiai módon meghatározták, hogy a csillag színképében az egyik, λ hullámhosszúságú elnyelési vonal a Doppler-effektus miatt kiszélesedik $[\lambda - \Delta\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$-re. Mekkora tömegű a bolygó?

Útmutatás: A Doppler-jelenség szerint a v sebességgel mozgó fényforrás által kibocsátott f frekvenciájú fényt az álló megfigyelő távolódáskor (vöröseltolódás) $\lambda + \Delta\lambda$, illetve közeledéskor (kékeltolódás) $\lambda - \Delta\lambda$ hullámhosszúnak érzékeli. Az elmélet szerint $\Delta\lambda = v/f$.

Megoldás

Az m tömegű bolygó és az M tömegű csillag is egyenletes körmozgást végez a közös tömegközéppont körül. A bolygó a tömegközépponttól $rM/(M+m)$ távolságra kering. Ha elhanyagolnánk, hogy a csillag is a közös tömegközéppont körül kering, akkor a csillag felénk mutató sebessége nem változna, így a Doppler-effektus miatt nem lenne vonalkiszélesedés, csak esetleg eltolódás.

Írjuk fel a bolygóra a dinamika alapegyenletét. A két égitest között ható gravitációs erő okozza a bolygó centripetális gyorsulását:

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{M}{M+m} r \quad \rightarrow \quad m + M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}.$$

Most a csillagra írjuk fel a dinamika alapegyenletét és fejezzük ki a csillag tömegközéppont körüli keringésének v sebességét:

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = M \frac{v^2}{\frac{m}{M+m} r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma m^2}{r\,(M+m)}},$$

amibe $M + m$ előbbi kifejezését behelyettesítve

$$v = \frac{\gamma m T}{2\pi r^2}.$$

Az elnyelési vonal $\Delta\lambda \ll \lambda$ kiszélesedését alakítsuk át:

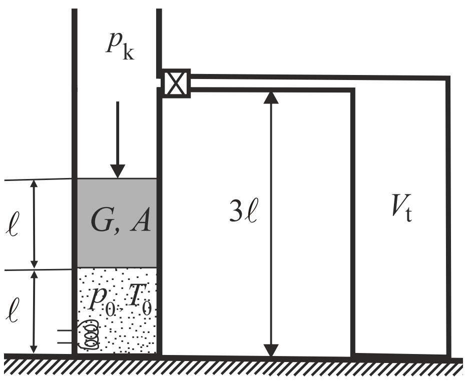
$$\Delta\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v\lambda}{c},$$

ahol c a fénysebesség. Innen v kifejezésével megkapjuk a bolygó tömegét:

$$m = \frac{2\pi c}{\gamma}\frac{r^2}{T}\frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

2. feladat

Egy függőleges helyzetű, henger alakú, $A = 1\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű (elegendően magas), hőszigetelt tartályban lévő nitrogéngázt könnyen mozgó, de jól záró, hőszigetelt, $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ hosszúságú, $G = 500\,\mathrm{N}$ súlyú dugattyú zár el a külső, $p_\mathrm{k} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ nyomású környezettől.



Az ábra szerint a henger 3ℓ magasságánál egy igen vékony cső segítségével egy $V_\mathrm{t} = 15$ liter térfogatú, hőszigetelt tartály csatlakozik a hengerhez. A csőben egy olyan szelep is található, mely csak akkor nyit, ha a szelep bal oldalán a nyomás eléri a külső nyomás 1,2-szeresét. A tartály kezdetben vákuumozott.

Kiinduláskor a dugattyút a henger aljától ℓ távolságra tartjuk, és a gáz nyomása ekkor $p_0 = 3p_\mathrm{k}$, hőmérséklete $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Ezt követően a dugattyúra ható külső erővel és a fűtőszállal biztosítjuk, hogy a gáz izotermikusan táguljon. Amint az egyensúly megtartásához szükséges külső erő nullára csökken, magára hagyjuk a dugattyút, majd a bezárt gáz hőmérsékletét a fűtőszál lassan 600 K-re növeli.

a) Mennyi munkát végzett a hengerben lévő gáz a folyamat kezdetétől a végéig?

b) Mennyi hőt vett fel a hengerben lévő gáz a folyamat kezdetétől a végéig?

c) Mekkora a tartályba jutott gáz hőmérséklete és nyomása a folyamat végén?

Útmutatás: A feladat egyes részei nemcsak integrálással, hanem összegzéssel is megoldhatók. Ehhez nyújt segítséget a következő összefüggés:

$$\sum_{x_1}^{x_2} \frac{\Delta x}{x} = \ln\frac{x_2}{x_1}$$

Megoldás

a) A dugattyú mozgása közben a függőleges irányú gyorsulása elhanyagolható, tehát a rá ható erők eredője nulla. Amikor a dugattyú egyensúlyához nem szükséges külső erő, a gáz nyomása:

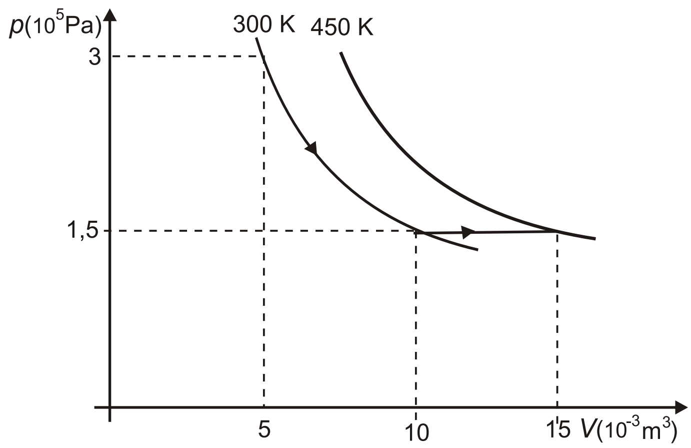
$$pA = p_\mathrm{k}A + G, \quad \rightarrow \quad p = p_\mathrm{k} + \frac{G}{A} = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}5p_\mathrm{k}.$$

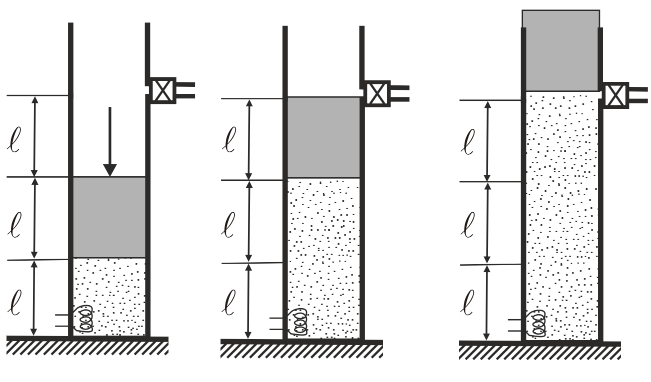
Kezdetben a bezárt gáz nyomása $p_0 = 3p_\mathrm{k}$ miatt ennek duplája, tehát az izoterm tágulás közben lefelé kell nyomni a dugattyút. Ezen kívül a Boyle–Mariotte-törvény alapján az izoterm folyamat végére a gáz térfogata a kezdeti érték kétszerese lesz. Kiinduláskor a gáz térfogata

$$V_0 = \ell A = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Ettől kezdve a gáz nyomása állandó, a külső nyomás másfélszerese. $2V_0$-tól $3V_0$-ig a folyamat izobár, hiszen addig a dugattyú alja a csőbemenet magasságához képest mélyebben helyezkedik el. $3V_0$ elérésekor a gáz hőmérséklete az izobár állapotváltozásra felírt gáztörvény alapján $1{,}5T_0 = 450\,\mathrm{K} < 600\,\mathrm{K}$. A gázt tovább melegíti a fűtőszál, miközben a gáz egy része kis adagokban a csövön keresztül a tartályba szivárog.

Az alábbi diagram a kezdőállapottól a szivárgás megindulásáig tartó folyamatot ábrázolja, az alatta lévő rajzok rendre az indulás kezdetét, az izobár folyamat kezdetét és a szivárgási állapotot mutatják. Munkavégzés az izoterm és az izobár folyamatban van.





Az izobár folyamatban a gáz munkája

$$W_2 = p\Delta V = pV_0 = 750\,\mathrm{J}.$$

Az izoterm folyamatot olyan részfolyamatokra bontjuk, amikor a nyomás már állandónak tekinthető, és az ezekben végzett munkákat összegezzük, vagyis

$$W_1 = \sum p\Delta V = \sum nRT\frac{\Delta V}{V} = nRT\sum\frac{\Delta V}{V},$$

ahol felhasználtuk, hogy $pV = nRT$ miatt $p = nRT/V$. A függvénytáblázat vagy az útmutatás segítségével az izoterm folyamatban a gáz munkája

$$W_1 = nRT\ln\frac{V_{\text{vég}}}{V_{\text{kezdeti}}},$$

amiből megállapíthatjuk, hogy

$$\sum\frac{\Delta V}{V} = \ln\frac{V_{\text{vég}}}{V_{\text{kezdeti}}}. \tag{1}$$

Azaz ebben az esetben

$$\sum\frac{\Delta V}{V} = \ln\frac{2V_0}{V_0} = \ln 2.$$

A kiinduló állapotra alkalmazva az állapotegyenletet (ekkor a hőmérséklet akkora, mint az izoterm folyamatban)

$$nRT = 3p_\mathrm{k}V_0 = 1500\,\mathrm{J},$$

ezzel a munka az izoterm folyamatban

$$W_1 = 1500\,\mathrm{J}\cdot\ln 2 \approx 1040\,\mathrm{J},$$

és így a hengerben lévő gáz a folyamat kezdetétől a végéig

$$W_{\text{gáz}} = W_1 + W_2 = 1790\,\mathrm{J} \approx 1{,}8\,\mathrm{kJ}$$

munkát végez.

Amikor a dugattyú alja eléri a csövet, a hengerből a gáz elkezd átáramlani a tartályba. De amint egy kis gázmennyiség átjut, a dugattyú lejjebb süllyed lezárva a csövet. Tehát a gáz kis adagokban jut át a tartályba, melyek egyre nagyobb hőmérsékletűek. A hengerben lévő gáz anyagmennyisége csökken, hőmérséklete nő, térfogata és nyomása (apró ingadozásoktól eltekintve) állandó marad. Ez azt is jelenti, hogy a hengerben lévő gáz belső energiája

$$E_{\text{henger}} = \frac{5}{2}pV = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}p_k\cdot 3V_0 = \frac{45}{4}p_kV_0$$

is állandó lesz. A szelep legelső nyitásától kezdve a hengerből és a tartályból álló rendszer nincs munkavégző kapcsolatban a környezettel (össztérfogatuk 30 liter, nem változik), ezért a gáz „átpöfögésének” kezdete után a gáz már nem végez több munkát.

b) Az első főtétel szerint a gáz által felvett hő a gáz belső energiáját növeli és fedezi a gáz munkáját, vagyis

$$Q = \Delta E + W_{\text{gáz}}.$$

A gáz munkáját már kiszámítottuk. Amíg nem kezd a gáz szivárogni, addig az összes kezdeti gázmennyiség felmelegszik $1{,}5T_0 = 450\,\mathrm{K}$ hőmérsékletre, tehát ebben a részben a belső energia megváltozása

$$\Delta E_1 = \frac{f}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2}\cdot\frac{3p_\mathrm{k}V_0}{T_0}(1{,}5T_0 - T_0) = \frac{15}{4}p_\mathrm{k}V_0 = 1875\,\mathrm{J}.$$

Miután a szelep kinyit, a gáz kis adagokban jut át a tartályba. Energetikailag ezt úgy tekinthetjük, hogy kissé megnöveljük a gáz belső energiáját, majd az átáramló kismennyiségű gáz magával viszi ezt a belső energia-növekményt a tartályba. Az egyes adagok belsőenergia-változásait kell tehát összegeznünk:

$$\Delta E_2 = \sum \frac{f}{2}nR\Delta T.$$

Mivel a nyomás és a térfogat állandó, így az állapotegyenlet

$$1{,}5p_\mathrm{k}\cdot 3V_0 = nRT \quad\rightarrow\quad nR = 4{,}5p_\mathrm{k}V_0\frac{1}{T},$$

vagyis az energiaváltozás

$$\Delta E_2 = \sum\frac{5}{2}\cdot 4{,}5p_\mathrm{k}V_0\frac{\Delta T}{T} = \frac{45}{4}p_\mathrm{k}V_0\sum\frac{\Delta T}{T}.$$

Az (1) összegzés eredményét (vagy az útmutatást) felhasználhatjuk, ha a V (vagy x) változó helyére a T változót írjuk, tehát

$$\sum\frac{\Delta T}{T} = \ln\frac{T_\text{vég}}{T_\text{kezdeti}}.$$

Esetünkben $T_\text{kezdeti} = 450\,\mathrm{K}$, és $T_\text{vég} = 600\,\mathrm{K}$, vagyis

$$\Delta E_2 = \frac{45}{4}p_\mathrm{k}V_0\ln\frac{4}{3}\approx 1620\,\mathrm{J}.$$

A teljes belsőenergia-változás

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 \approx 3500\,\mathrm{J},$$

a felvett hő pedig

$$Q = \Delta E + W_\text{gáz} = 5283\,\mathrm{J}\approx 5{,}3\,\mathrm{kJ}.$$

c) Először is határozzuk meg a $T = 450\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű gáz teljes belső energiáját (n_0-lal most a kezdetben a hengerben levő anyagmennyiséget jelöltük):

$$E = \frac{5}{2}Rn_0T = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}p_k\cdot 3V_0 = \frac{45}{4}p_kV_0 = 5625\,\mathrm{J}.$$

A tartályban maradó gáznak a belső energiája végig ennyi marad, hiába nő a hőmérséklete, mert az anyagmennyisége csökken. Ezután határozzuk meg, hogy a gáz hányad része jut át a hengerből a tartályba. Ha a nyomás és az anyagmennyiség maradna állandó, akkor a 450 K-ről 600 K-re melegedő gáz térfogata 4/3 részére, vagyis 20 literre növekedne. Ebből azonban csak 15 liter marad meg, tehát a gáz negyede távozik. Mivel nincs munkavégzés, így a rendszer teljes belső energiája megegyezik a „pöfögés" kezdete előtti állandó nagyságú energiával és a fűtőszál hőközlésével. A fentiekből az következik, hogy a tartályba kerülő negyed résznyi ($n_0/4$) gáz teljes belső energiája éppen annyi, mint a szivárgási szakasz alatti hőközlés, vagyis az $E_{\text{tartály}} = E_2 = 1620\,\text{J}$ belsőenergia-növekmény. Ebből már ki is tudjuk számítani a keresett hőmérsékletet:

$$E_{\text{tartály}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{n_0}{4} R T_{\text{tartály}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3 p_k V_0}{T_0} T_{\text{tartály}} \quad \rightarrow \quad T_{\text{tartály}} = 518\,\text{K}.$$

A tartályban lévő gáz nyomása:

$$p_{\text{tartály}} = \frac{\frac{n_0}{4} R T_{\text{tartály}}}{V_{\text{tartály}}} = 0{,}43 \cdot 10^5\,\text{Pa}.$$

A számítások során felhasználhatjuk azt is, hogy az anyagmennyiség és a gázállandó szorzata éppen

$$n_0 R = \frac{3 p_k V_0}{T_0} = 5\,\frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

3. feladat

Egy síkkondenzátor kör alakú, egymástól kicsiny d távolságra lévő lemezei között, azokkal párhuzamosan egy r középsugarú, nagyon kicsi, A keresztmetszetű, N menetszámú, rövidre zárt toroid van ($\sqrt{A} \ll r$). A toroid tengelye átmegy a kondenzátor lemezeinek középpontjain. Speciális áramkörrel sikerül úgy kisütni a kondenzátort, hogy a feszültsége az idő függvényében a következő függvény szerint T idő alatt csökken nullára:

$$U(t) = U_0 - a \cdot t^2.$$

a) Határozzuk meg az a együtthatót!

b) Határozzuk meg a toroid középsugara mentén keletkező mágneses indukció nagyságát az idő függvényében! A toroid vezetékének elektromos ellenállása nagyon nagy.

c) Mennyi elektromos töltés halad át az R ellenállású toroidot alkotó drót keresztmetszetén a kisütés alatt?

Megoldás

a) Helyettesítsük be a feszültség-idő függvénybe a $(T, 0)$ értékpárt: $0 = U_0 - aT^2$. Innen az a együttható kifejezhető:

$$a = \frac{U_0}{T^2}.$$

b) A keletkező mágneses tér örvényeit az áramok és az időben változó elektromos tér (eltolási áram) határozza meg (Maxwell IV. tv.):

$$\sum \vec{B} \cdot \Delta\vec{s} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right).$$

Mivel a toroid R ellenállása nagyon nagy, a benne folyó elektromos áram igen kicsi, így az áram által keltett örvényeket elhanyagoljuk a változó elektromos tér által keltett örvények mellett:

$$\sum \vec{B} \cdot \Delta \vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}.$$

Ebben a kifejezésben Ψ az elektromos fluxus: $\Psi = E \cdot A$, ahol A a körbezárt felület nagysága, jelen esetben a kondenzátorlemezekkel párhuzamos, r sugarú körlap területe, E pedig a térerősség, aminek nagysága kifejezhető a kondenzátor lemezei közötti feszültséggel és a lemezek d távolságával: $E = U/d$. Az útvonalat a toroid középvonalában véve (és kihasználva a rendszer hengerszimmetriáját):

$$B \cdot 2r\pi = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r^2 \pi}{d} \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2d} \frac{\Delta U}{\Delta t}.$$

Határozzuk meg a $\Delta U / \Delta t$ hányadost!

1. módszer:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\left[U_0 - a\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)^2\right] - \left[U_0 - a\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)^2\right]}{\Delta t} = \frac{-2at\Delta t}{\Delta t} = -2at.$$

2. módszer: analógia a kinematikában megismert négyzetes úttörvénnyel, sebesség-idő függvénnyel.

3. módszer: deriválással.

Tehát a mágneses indukció az idő lineáris függvényeként változik. A feszültség változási sebességében a negatív előjel mutatja, hogy a feszültség csökken. A mágneses tér nagyságában ez az előjel nem lényeges.

$$B(t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2d}(-2at) = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 r U_0}{T^2 d} t.$$

c) Mivel a toroid keresztmetszete nagyon kicsi, ezért a toroid egy menetének mágneses Φ fluxusát számolhatjuk a középsugara mentén számolt B segítségével: $\Phi = B \cdot A$. A toroidot alkotó drót adott keresztmetszetén a kisülés ideje alatt áthaladó elektromos töltés mennyisége:

$$\begin{aligned}|Q| &= \left|\sum \Delta Q\right| = \left|\sum \frac{U_\mathrm{i}}{R} \Delta t\right| = \left|\sum \frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \Delta t\right| = \left|\sum \frac{NA}{R} \Delta B\right| = \frac{NA}{R} \left|\sum \Delta B\right| \\ &= \frac{NA}{R} \left|B(t=T) - B(t=0)\right| = \frac{NA}{R} \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r U_0}{Td},\end{aligned}$$

azaz

$$|Q| = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r N A U_0}{R T d}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

	Annak észrevétele, hogy a csillag és a bolygó is egyenletes körmozgást végez a közös tömegközéppont körül:	3 pont
	A csillag és a bolygó pályasugarainak helyes megállapítása:	2 pont
	Az egyenletes körmozgás dinamikai alapegyenletének felírása a bolygóra és a csillagra is:	3+3 pont
	Az elnyelési vonal kiszélesedésének megadása hullámhosszal:	3 pont
	A bolygó tömegének megadása:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Az izoterm folyamatvégi térfogat meghatározása:	1 pont
	A szivárgás kezdetén a hőmérséklet kiszámítása:	1 pont
	Az izobár folyamatbeli munka kiszámítása:	1 pont
	Az izoterm folyamatbeli munka meghatározása:	2 pont
	A gáz összes munkájának megadása:	1 pont
b)	A belső energia szivárgásig történő változásának kiszámítása:	1 pont
	A belső energia szivárgás alatt történő változásának kiszámítása:	6 pont
	Az összes felvett hő kiszámítása:	2 pont
c)	A tartályba áramló gáz hőmérsékletének meghatározása:	3 pont
	A tartályba áramló gáz nyomásának kiszámítása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	Az a együttható helyes megállapítása:	2 pont
b)	Annak felismerése, hogy az időben változó elektromos tér kelti a mágneses tér örvényeit:	2 pont
	Annak felismerése, hogy a nagy elektromos ellenállás miatt eltekinthetünk az elektromos áram által keltett mágneses tér örvényeitől:	2 pont
	A gerjesztési törvény (Maxwell IV. tv.) helyes felírása:	2 pont
	Az elektromos tér időbeli változási gyorsaságának (deriváltjának) helyes felírása:	4 pont
	A mágneses indukció nagyságának megadása az idő függvényében:	2 pont
c)	Adott keresztmetszeten a kisülés ideje alatt áthaladó elektromos töltés mennyiségének helyes megadása:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.