OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

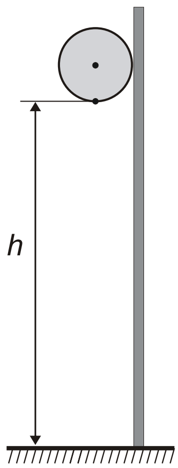
FIZIKA I. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

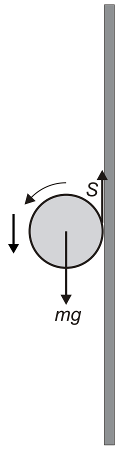
A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Függőleges helyzetű mágnestáblához vasgolyót érintünk a vízszintes felülettől h magasságban, majd elengedjük azt. A golyó a mágnestáblán lefelé tisztán gördül, viszont, ha a lap és a golyó közötti vonzerő bármennyivel is kisebb lenne a ténylegesnél, a golyó megcsúszna. Határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkedik a golyó a vízszintes, súrlódásmentes felülettel való tökéletesen rugalmas, pillanatszerű ütközés után! Tételezzük fel, hogy a mágnestábla és a golyó közötti vonzerő nem változik a mozgás során, illetve a tapadási és a súrlódási együtthatók megegyeznek, továbbá az esetlegesen fellépő örvényáramok hatásától eltekinthetünk. (Az m tömegű golyó tömegközéppontján átmenő tengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka $\theta = 2mR^2/5$.)



Megoldás



1. ábra

Az 1. ábra mutatja a táblán lefelé gördülő golyóra ható függőleges erőket. A lefelé mutató nyíl a sebesség irányát, az íves nyíl a forgás irányát jelöli. A mozgásegyenlet szerint

$$mg - S = ma, \tag{1}$$

a forgásegyenlet szerint pedig

$$SR = \Theta\beta = \frac{2}{5}mR^2\beta. \tag{2}$$

A tiszta gördülés feltétele:

$$a - \beta R = 0. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből

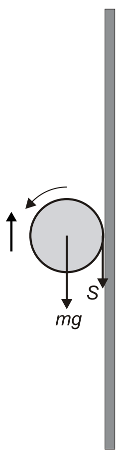
$$a = \frac{5}{7}g,$$

illetve

$$\beta = \frac{5}{7}\frac{g}{R}$$

adódik. Az ütközés előtti pillanatban a sebesség

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \tag{4}$$



2. ábra

Az ütközés során a sebesség ellentétesre változik. A mozgásegyenlet ezután (lásd a 2. ábrát, ahol a felfelé mutató nyíl a sebesség irányát, az íves nyíl a forgás irányát jelöli.)

$$mg + S = ma', \tag{5}$$

a forgásegyenlet pedig

$$SR = \Theta\beta' = \frac{2}{5}mR^2\beta'. \tag{6}$$

Mivel a lefelé gördülés közben a golyó a megcsúszás határán van (lásd a feladat szövegét), továbbá a tapadási és a súrlódási együtthatók megegyeznek, így az (1) és (2) egyenletbeli tapadási, illetve az (5) és (6) egyenletbeli csúszó súrlódási erő egyaránt S. A (2) és (6) egyenletek azonosak, tehát a lefelé, illetve felfelé mozgás során a szöggyorsulások nagysága azonos, azaz $\beta' = \beta = \frac{5}{7}\frac{g}{R}$. Az (5) és (6) egyenletek alapján a felfelé mozgás során a gyorsulás

$$a' = \frac{9}{7}g. \tag{7}$$

A tetőpont elérése kétféle módon történhet: i) a golyó a tetőpontban még forog (megtartva eredeti forgásirányát); ii) a felfelé mozgás során valamikor beáll a tiszta gördülés, és a tetőpontban mind a haladó mozgás, mind a forgás egy pillanatra megáll. Tételezzük fel, hogy az i) eset valósul meg. A felfelé mozgás idejére a (4) és a (7) összefüggésekből

$$t' = \frac{v}{a'} = \sqrt{\frac{70}{81}\frac{h}{g}},$$

az emelkedési magasságra pedig

$$h' = \frac{1}{2}vt' = \frac{5}{9}h$$

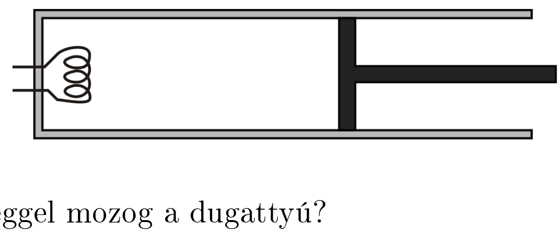
adódik. A golyó tetőpontbeli szögsebessége pedig

$$\omega = \frac{v}{R} - \beta t' = \left(\sqrt{\frac{10}{7}} - \frac{5}{7}\cdot\frac{\sqrt{70}}{9}\right)\frac{\sqrt{gh}}{R} > 0,$$

ami azt mutatja, hogy valóban az i) eset valósul meg.

2. feladat

Egy nagyon jó hőszigetelésű hengerben 5 liter normál állapotú levegőt zárunk el egy igen kis súrlódással mozgatható, $1\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű, rendkívül könnyű dugattyúval. A henger belsejében egy, óránként 1500 J hőt termelő elektromos fűtőtest van. A külső légköri nyomás $10^5\,\mathrm{Pa}$.



a) Mekkora sebességgel mozog a dugattyú?

A fűtőtest bekapcsolása után 10 perccel a dugattyú a hengerben mozogva egy kis szennyeződésen hirtelen megszorul. A dugattyú 5 perc várakozás után indul el újra, mozgása a továbbiakban ismét gyakorlatilag súrlódásmentes lesz. A szennyeződés szorításából kiszabaduló dugattyú esetlegesen bekövetkező rezgései nagyon gyorsan lecsillapodnak, az emiatt fellépő energiaveszteségektől tekintsünk el.

b) Mekkora maximális fékezőerőt fejtett ki a dugattyú mozgását időlegesen megakadályozó kis szennyeződés?

c) Ábrázoljuk a dugattyú helyzetét az idő függvényében a teljes folyamat első 25 percére! A dugattyú helyét mérjük a henger zárt végétől.

Megoldás

Adatok: $V_0 = 5\,\mathrm{liter}$, $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $T_0 = 273\,\mathrm{K}$, $A = 1\,\mathrm{dm}^2$, $P = 1500\,\mathrm{J/h}$, $t = 600\,\mathrm{s}$, $t^* = 300\,\mathrm{s}$.

a) A dugattyú által 10 perc alatt megtett út

$$x = \frac{\Delta V}{A},$$

ahol ΔV a gáz térfogatváltozása, amit úgy számíthatunk ki, ha figyelembe vesszük, hogy a térfogatváltozás izobár, illetve azt is tudjuk, hogy 10 perc alatt $Q = Pt = 250\,\mathrm{J}$ hőt termel a fűtőszál:

$$Q = \frac{7}{2}Rn\Delta T = \frac{7}{2}p_0\Delta V \quad \rightarrow \quad \Delta V = \frac{2Q}{7p_0} = 7{,}143 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3.$$

A dugattyú sebessége:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\Delta V}{At} = 0{,}119\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}12\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés: A dugattyú azért mozog állandó sebességgel, mert minden egyforma kicsiny hőközlés ugyanakkora hőmérséklet-változással, illetve ugyanakkora térfogatváltozással jár.

b) Amikor a dugattyú megszorul, akkor a folyamat izochorrá válik. A megnövekedett nyomást az alábbi módon tudjuk kiszámítani:

$$Pt^* = Q = \frac{5}{2}Rn\Delta T^* = \frac{5}{2}\left(V_0 + \Delta V\right)\Delta p \quad \rightarrow \quad \Delta p = \frac{2Pt^*}{5\left(V_0 + \Delta V\right)} \approx 8{,}75 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}.$$

Így a dugattyúra ható maximális fékezőerő, ami az izochor szakasz végén lép fel:

$$F_{\max} = A \cdot \Delta p \approx 87{,}5\,\mathrm{N}.$$

c) Mivel a dugattyú igen könnyű, így gyakorlatilag végtelen (igen nagy) gyorsulással tud mozogni. A felgyorsult könnyű dugattyú túlszalad az egyensúlyi helyzetén, rezgő mozgásba kezd, ami energiaveszteséggel jár. De a feladat szövege szerint ezt a hatást elhanyagolhatjuk. Így a megoldást közelítő módszerrel találhatjuk meg. Kétféle számítást mutatunk be.

Először a folyamatot a jól ismert adiabatikus egyenlettel írjuk le. Amikor a tapadási súrlódási erő hirtelen megszűnik és a dugattyú megindul, akkor a hőszigetelt rendszerben a gáz adiabatikus tágulása játszódik le igen rövid idő alatt. A Δp nyomástöbblet eltűnik, amikor a térfogat $V_0 + \Delta V^*$-ra nő, így a következő adiabatikus egyenletet írhatjuk fel:

$$(p_0 + \Delta p)\,(V_0 + \Delta V)^{7/5} = p_0\,(V_0 + \Delta V^*)^{7/5}\,,$$

amiből

$$\Delta V^* = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{5/7} \cdot (V_0 + \Delta V) - V_0 = 1{,}07 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3.$$

Tehát ebben a közelítésben a gáz térfogata hirtelen $\Delta V^* - \Delta V = 3{,}53 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$ értékkel megnő, vagyis a dugattyú 3,53 cm-rel előrébb ugrik.

A folyamat másik lehetséges közelítő leírása az első főtétel segítségével lehetséges. A rezgés rövid időtartama alatt a fűtőszál által leadott energiát elhanyagolva, valamint felismerve, hogy a feladat szövege szerint elhanyagolandó súrlódási hő a rendszer tökéletes hőszigetelése miatt „bent marad a rendszerben”. A dugattyú kiszabadulása előtti, és a rezgés befejezte utáni állapot között az első főtételt így írhatjuk fel:

$$\frac{f}{2}p_0(V_0 + \Delta V^*) - \frac{f}{2}(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = -p_0(\Delta V^* - \Delta V),$$

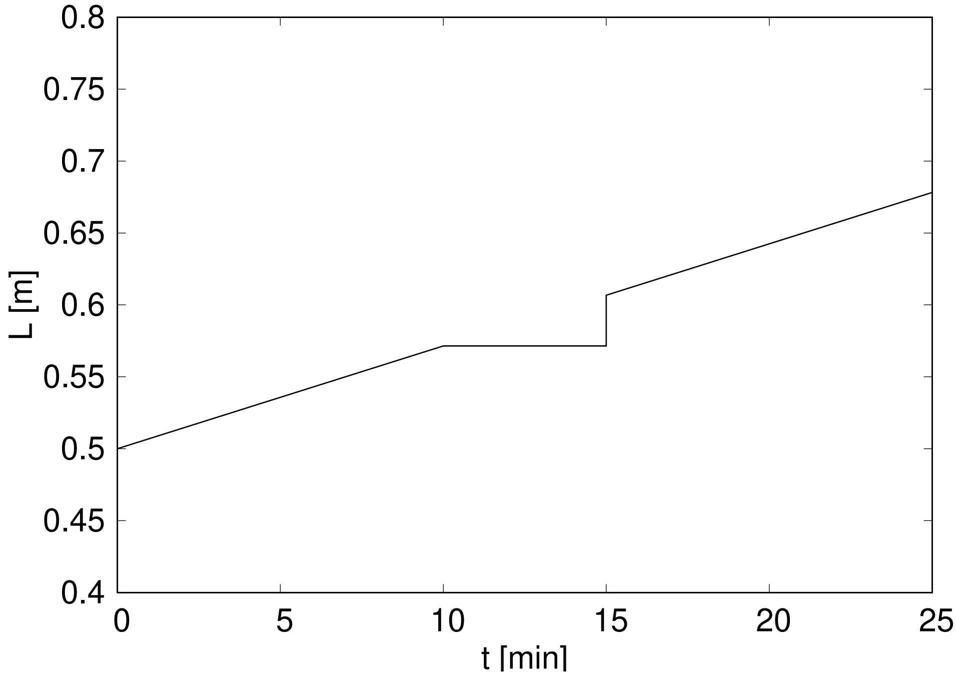
melyből

$$\Delta V^* = \frac{f}{f+2}\frac{\Delta p}{p_0}(V_0 + \Delta V) + \Delta V = 1{,}0714 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

adódik, ami megegyezik azzal, amit az adiabata egyenletéből kapnánk a $\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}} \approx 1 + \frac{5}{7}\frac{\Delta p}{p_0}$ közelítéssel élve. A ΔV^*-ra e két különböző módszerrel kapott numerikus eredmény mindössze 4 ezrelékkel tér el egymástól.

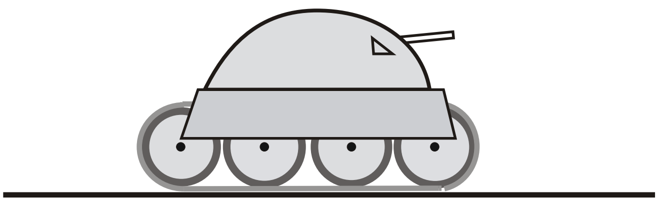
A mozgás következő részében a dugattyú ugyanakkora sebességgel mozog, mint a megszorulás előtt.

A dugattyú a henger zárt végétől számítva 0,5 m-ről indul, majd egyenletesen mozog 10 percig, és így a távolság 0,571 m-re nő. A megszorulás idejére 5 percig itt marad. Ezek után a távolság hirtelen felugrik 0,607 méterre, majd még 10 percig folytatódik a tágulás, és végül a dugattyú a henger zárt végétől 0,678 m-re jut.



3. feladat

Egy játékgyártó cég mielőtt piacra dobná termékeit, teszteli azokat. A tesztelés alatt álló, m tömegű, távirányítós játéktank (vázlatos szerkezeti felépítését lásd az ábrán) vízszintes szigetelősíkon, egyenes vonalban, egyenletesen halad v sebességgel. A precíz mérleg, ami a tank súlyát méri, egyszercsak 1 ezrelékkel kisebb értéket kezd mutatni. Megállapítják, hogy a tank annak haladási irányára merőleges, vízszintes irányú, homogén, B indukciójú mágneses mezőbe ért. Az is megállapítható, hogy az egy darabból (nem párból) álló gumi lánctalp elektrosztatikusan egyenletesen feltöltődött. Határozzuk meg a lánctalp össztöltését a tömegcsökkenésből!

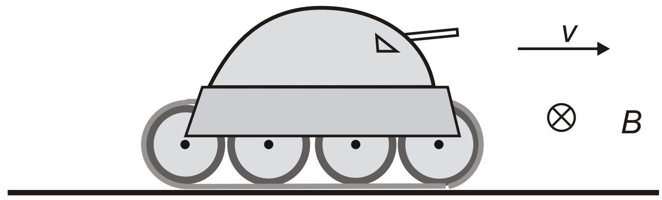


Megoldás

Vegyük észre, hogy a lánctalp az ábra síkjára merőlegesen „összenyomható”, azaz kétdimenziósítható. A szöveg és az ábra nem ad információt a keréksugár és a lánctalp hosszának arányáról, de némi belegondolással belátható, hogy erre nincs is szükség. A lánctalpat érdemes gondolatban a következő részekre bontani: a talajjal érintkező, nyugvó szakaszra; az ezzel azonos hosszúságú, $2v$ sebességű szakaszra; és az első, illetve hátsó kerékhez illeszkedő félkörívekre. E két félkörív gondolatban egy tisztán gördülő karikává egyesíthető. Legyen a párhuzamos egyenes szakaszok töltése szakaszonként Q_1 a félkörívéké egyenként Q_2, így a lánctalp össztöltése

$$Q = 2\left(Q_1 + Q_2\right).$$

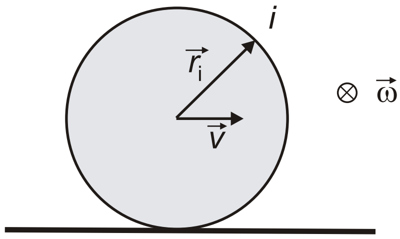
A szöveg súlycsökkenésről ír, így a következő ábra szerint jobbra mozgó tank esetén az indukcióvektornak a papír síkjára merőlegesen befelé kell mutatni, ha a lánctalp töltése pozitív. (Ha a lánctalp töltése negatív, akkor B kifelé mutat, de ez nem befolyásolja a megoldást.)



Tekintsük az egyes darabokra ható Lorentz-erőket. A talajjal érintkező szakaszra nem hat erő, mivel nem mozog. A felső $2v$ sebességgel mozgó szakaszra ható erő felfelé mutat és nagysága

$$F_1 = Q_1 2vB.$$

A tisztán gördülő karikára ható teljes Lorentz-erő meghatározásához gondolatban bontsuk a karikát kicsiny, pontszerűnek tekinthető darabokra.



A karika kerületén lévő, i-edik darab sebessége

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i,$$

ahol $\vec{v}$ a karika középpontjának sebessége, $\vec{\omega}$ a karika szögsebességvektora, $\vec{r}_i$ a középpontból a kiszemelt pontba mutató vektor. Az i-edik pontbeli, ΔQ töltésre ható Lorentz-erő

$$\Delta\vec{F}_i = \Delta Q\,(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{B}.$$

Könnyű belátni, hogy minden pontöltés a vele átellenes ($-\vec{r}_i$-beli) töltéssel olyan párt alkot, melyre ható eredő erőben az $\vec{\omega} \times \vec{r}_i$ tagok kiejtik egymást. Így a karikára ható eredő Lorentz-erőre a függőlegesen felfelé mutató

$$F_2 = 2Q_2 vB$$

érték adódik. A karikára ható, függőlegesen felfelé mutató teljes Lorentz-erő pedig

$$F = 2\,(Q_1 + Q_2)\,vB = QvB,$$

ami a feladat szövege szerint a súlycsökkenésért felelős, azaz

$$\frac{mg}{1000} = QvB,$$

ahonnan a lánc össztöltésére

$$Q = \frac{mg}{1000vB}$$

adódik.

Megjegyzések:

- A feladat megoldható a vektoriális szorzat használata nélkül is: teljesértékű megoldás annak felismerésével és indoklásával is megkapható, hogy a Lorentz-erő megadható az össztöltés és a töltésközéppont v sebességével is, ugyancsak $F = QvB$-t eredményezve.

- Ez a képzeletbeli játékgyári tesztelés a gyakorlatban nem jöhetne létre, mert reális adatok esetén vagy túlságosan nagy töltéssel kellene a lánctalpat feltölteni, vagy túlságosan nagy mágneses teret kellene alkalmazni.

Értékelési útmutató

1. feladat

Mozgásegyenlet a lefelé mozgásra:	2 pont
Forgásegyenlet a lefelé mozgásra:	2 pont
A tiszta gördülés feltétele:	2 pont
A gyorsulás magadása:	1 pont
A szöggyorsulás megadása:	1 pont
Az ütközés előtti sebesség magadása:	1 pont
Az ütközés során a sebesség ellentétesre vált:	1 pont
Annak a ténynek a következményei, hogy legördüléskor a megcsúszás határán volt:	2 pont
Mozgásegyenlet a felfelé mozgásra:	2 pont
Forgásegyenlet a felfelé mozgásra:	2 pont
A gyorsulás megadása:	1 pont
Emelkedési idő megadása:	1 pont
Annak igazolása, hogy az i) eset valósul meg:	1 pont
Emelkedési magasság megadása:	1 pont
Összesen:	**20 pont**

2. feladat

A dugattyú sebességének a kiszámítása:	3 pont
A maximális erő meghatározása:	3 pont
Az adiabatikus ugrás kiszámítása:	8 pont
Annak felismerése, hogy az ugrás után ugyanakkora marad a sebesség, mint korábban:	2 pont
A grafikon helyes felrajzolása:	4 pont
Összesen:	**20 pont**

3. feladat

Annak észrevétele, hogy milyen darabokra kell a lánctalpat bontani:	3 pont
Annak észrevétele, hogy a talajjal érintkező részre nem hat Lorentz-erő:	2 pont
Annak észrevétele, hogy a felső egyenes szakasz $2v$ sebességgel mozog:	1 pont
A felső egyenes szakaszra ható Lorentz-erő:	2 pont
A görbült részek sebességének megadása:	2 pont
A görbült részekre ható Lorentz-erő helyes értelmezése, annak helyes megadása (vektorszorzat használata, vagy anélküli helyes indoklással):	6 pont
A teljes Lorentz-erő megadása:	2 pont
A töltés magadása a feladat feltételéből:	2 pont
Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.