Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

FIZIKA

II. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

Előfordulhat, hogy valamelyik feladat megoldása során olyan egyenlet adódik, amelyiket csak numerikusan lehet megoldani. A numerikus értékek meghatározásánál három értékes jegynél pontosabb számolásra nincs szükség.

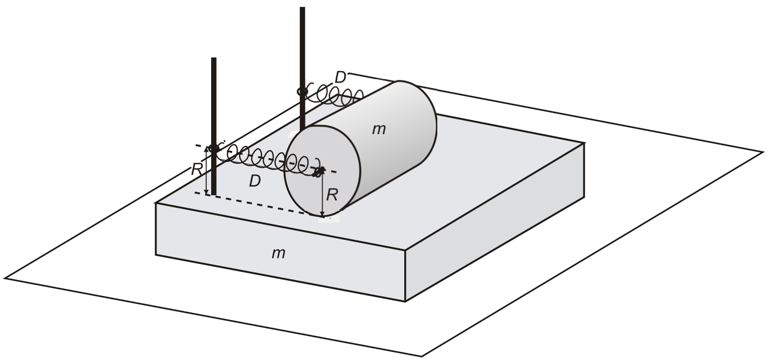
1. feladat

Vízszintes talajon egy m tömegű hasáb nyugszik. A hasábra egy m tömegű, homogén, R sugarú tömör hengert helyezünk, melynek tengelyéhez az ábrán látható módon két, D direkciós erejű rugót rögzítünk. A rugók másik végpontját R magasságban két elhanyagolható tömegű pálcához rögzítjük. Kezdetben a rugók nyújtatlanok. A hasábot lefogjuk, a hengert nyugalmi helyzetéből x_0 távolsággal úgy mozdítjuk ki, hogy tengelye az eredeti helyzetével végig párhuzamos marad. Egy adott pillanatban egyszerre elengedjük a hasábot és a hengert.

a) Határozzuk meg a henger mozgásának periódusidejét, ha a henger a hasábon tisztán gördül és a hasáb az érdes talajon nem mozdul el!

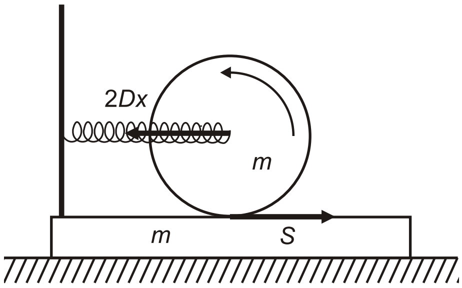
b) Határozzuk meg a henger mozgásának periódusidejét akkor is, ha a talaj annyira sima, hogy a talaj és a hasáb között a súrlódástól eltekinthetünk, viszont a henger továbbra is tisztán gördül a hasábon!

c) Mekkora az egyes esetekben a henger tömegközéppontjának maximális sebessége?



Megoldás

a)



Jelölje x a rugó megnyúlását. Írjuk fel a henger tömegközéppontjára a dinamika alapegyenletét, a tömegközéppont körüli forgásra a forgómozgás alapegyenletét és a tisztán gördülés feltételét.

$$S - 2Dx = ma, \tag{1}$$

$$SR = \Theta\beta, \tag{2}$$

$$a = -R\beta. \tag{3}$$

(2) és (3)-ból kapjuk ($\Theta = mR^2/2$):

$$SR = \frac{1}{2}mR^2\left(-\frac{a}{R}\right) \quad \rightarrow \quad S = -\frac{1}{2}ma.$$

Így (1)-gyel

$$-2Dx = \frac{3}{2}ma, \quad \rightarrow \quad a = -\frac{4D}{3m}x,$$

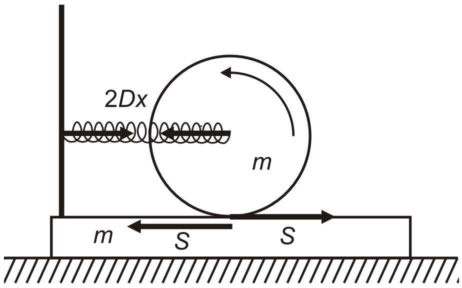
tehát a mozgás harmonikus rezgőmozgás, így

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4D}{3m}},$$

amelyből a henger mozgásának periódusideje:

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{3m}{D}}.$$

b)



A tömegközéppont nyugalomban marad, ezért az egyenlő nagyságú tömegek miatt a két test tömegközéppontjának kitérése, sebessége, gyorsulása minden időpillanatban azonos nagyságú és ellentétes irányú.

Írjuk fel a hengerre a dinamika és a forgómozgás alapegyenletét. Jelölje x a rugó megnyúlását.

$$S - 2Dx = ma, \tag{4}$$

$$SR = \Theta\beta = \frac{1}{2}mR^2\beta. \tag{5}$$

Mivel a hasáb gyorsulása $-a$ és a henger tisztán gördül, ezért:

$$R\beta = -2a. \tag{6}$$

Az (5) és (6)-ból (vagy a súrlódási erő-ellenerő alapján) kapjuk:

$$S = -ma.$$

Beírva (4)-be:

$$-ma - 2Dx = ma, \quad \to \quad a = -\frac{D}{m}x.$$

A henger kitérése a rugó megnyúlásának a fele, $x = 2y$, így

$$a = -\frac{2D}{m}y.$$

A mozgás harmonikus rezgőmozgás, így:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2D}{m}},$$

így a mozgás periódusideje:

$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{2m}{D}}.$$

c) A harmonikus rezgőmozgások miatt:

$$v_{\max} = A\omega.$$

Így az *a)* esetben

$$v_{1\max} = x_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{D}{3m}},$$

a *b)* esetben

$$v_{2\max} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{2D}{m}} = x_0\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Megjegyzés: a sebességeket a mechanikai energiamegmaradás tételével is számolhatjuk. Az *a)* esetben

$$2 \cdot \frac{1}{2}Dx_0^2 = \frac{1}{2}mv_{1\max}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_{1\max}}{R}\right)^2, \quad \to \quad v_{1\max} = x_0 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{D}{3m}}.$$

A *b)* esetben

$$2 \cdot \frac{1}{2} D x_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_{2max}^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Mivel

$$\omega = \frac{2v}{R},$$

ezért

$$D x_0^2 = 2 m v_{2\max}^2, \quad \rightarrow \quad v_{2\max} = \sqrt{\frac{D}{2m}} \cdot x_0 = x_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

2. feladat

Hat szabadsági fokú metángázt használó speciális hőerőgéppel olyan körfolyamatot hajtunk végre, ami a $p - V$ állapotsíkon ábrázolva, a (p_0, V_0) pontból kiindulva egy tágulási szakasszal kezdődik, majd egy adiabatikus összenyomással jut vissza a kezdőállapotba. A tágulási szakasz a $p - V$ síkon egy egyenessel ábrázolható, ami a következő egyenlettel írható le:

$$p = \frac{p_0}{4} \left(5 - \frac{V}{V_0} \right).$$

a) Numerikus számítással, három értékes jegy pontossággal határozzuk meg a metángáz maximális térfogatát a körfolyamat során, ha tudjuk, hogy a kiindulási térfogat $V_0 = 1\,\mathrm{m}^3$!

b) Fejezzük ki a gáz által felvett teljes hő értékét a kiindulási állapottól kezdve a térfogat függvényében, ha tudjuk azt is, hogy a kiindulási nyomás $p_0 = 10^6\,\mathrm{Pa}$!

c) Mekkora a körfolyamat hatásfoka?

Megoldás

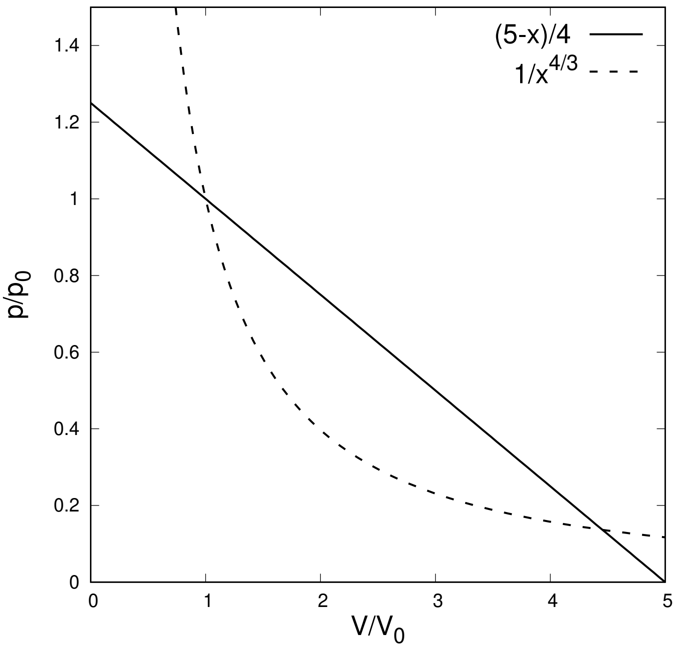
a) Az ábrán látható adiabata és a megadott egyenes $V = V_0$-on kívüli metszéspontját kell megtalálnunk:

$$p = p_0 \frac{V_0^\kappa}{V^\kappa} = \frac{p_0}{4} \left(5 - \frac{V}{V_0} \right) \quad \rightarrow \quad 4 V_0^{4/3} = 5 V^{4/3} - \frac{V^{7/3}}{V_0}.$$

Kihasználtuk, hogy a hat szabadsági fokú gáz fajhőhányadosa $\kappa = 4/3$. Alkalmazzuk a $z = V^{1/3}$ helyettesítést, és használjuk ki, hogy a kezdőtérfogat 1 egységnyi:

$$4 = 5z^4 - z^7,$$

vagyis meg kell keresnünk az $f(z) = z^7 - 5z^4 + 4$ függvény zérushelyét (a triviális $z = 1$ értéken kívül). Néhány okos próbálkozással hamar eljuthatunk az általunk keresett gyökhöz, ami $z = 1{,}645$, vagyis a metángáz maximális térfogata: $V = z^3 = 4{,}45\,\mathrm{m}^3$.



b) Az egyenes szakaszon a kezdőponttól indulva a gáz által felvett hőt az első főtétel segítségével kaphatjuk meg. Bizonyos V térfogatig felírva::

$$Q = \Delta E + |W| = \frac{f}{2}(pV - p_0V_0) + \frac{(p+p_0)}{2} \cdot (V - V_0)\,,$$

ahol $f = 6$ és $p = (p_0/4) \cdot (5 - V/V_0)$. Behelyettesítés és rendezés után a következő alakra jutunk:

$$Q(V) = -\frac{7}{8}\frac{p_0}{V_0}V^2 + 5p_0V - \frac{33}{8}p_0V_0 = \frac{p_0}{8}\left(33 - \frac{7V}{V_0}\right)(V - V_0).$$

Ha ábrázoljuk a teljes felvett hőt a térfogat függvényében, akkor „lefelé konyuló” parabolát kapunk, melynek egyik zérushelye $V = V_0$, míg a másik zérushely: $V = 33/7{\cdot}V_0 \approx 4{,}7 \cdot V_0$, aminek nincs fizikai jelentése, mert ezt a térfogatot soha nem éri el a metángáz a körfolyamat során. Ha numerikusan is meg akarjuk kapni a felvett hő értékét a térfogat függvényében, akkor be kell helyettesítenünk p_0 és V_0 értékét, valamint V értékét köbméterben kell beírnunk a formulába:

$$Q(V) = \left(10^6\,\mathrm{Pa}\right) \cdot \left(\frac{33}{8} - \frac{7V[\mathrm{m}^3]}{8\,\mathrm{m}^3}\right) \cdot \left(V[\mathrm{m}^3] - 1\,\mathrm{m}^3\right).$$

c) A körfolyamat hatásfokának meghatározásához tudnunk kell a gáz által felvett, illetve leadott hőmennyiségeket. A *b)* pontban meghatározott teljes hő a térfogat függvényében egy maximummal rendelkező függvény. Ebből láthatjuk, hogy a gáz elemi lépésekben a maximumig vesz fel hőt, utána pedig lead. A parabola maximumhelye a két zérushely számtani közepébe esik, vagyis esetünkben

$$V^* = \frac{V_0 + \frac{33}{7}V_0}{2} = \frac{20}{7}V_0.$$

A fentiek alapján kiszámíthatjuk a felvett hő nagyságát a körfolyamat során:

$$Q_{\mathrm{fel}} = \frac{p_0}{8}\left(33 - \frac{7}{V_0}\cdot\frac{20}{7}V_0\right)\left(\frac{20}{7}V_0 - V_0\right) = \frac{169}{56}p_0V_0 = 3{,}02p_0V_0.$$

Az egyenes szakaszon a leadott hő a maximális teljes hő (vagyis a fenti felvett hő) és a maximális térfogathoz tartozó hő különbsége:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{le}} &= Q_{\mathrm{fel}} - Q(V = 4{,}45\,\mathrm{m}^3) = 3{,}02p_0V_0 - \frac{p_0}{8}\left(33 - \frac{7\cdot(4{,}45\,\mathrm{m}^3)}{V_0}\right)\left(4{,}45\,\mathrm{m}^3 - V_0\right) = \\ &= 2{,}23p_0V_0. \end{aligned}$$

Az adiabatán sem hőfelvétel, sem hőleadás nincs, ezért a hatásfok:

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{fel}} - Q_{\mathrm{le}}}{Q_{\mathrm{fel}}} \approx 26\%$$

Megjegyzés: Számolásunkat úgy ellenőrizhetjük, ha meghatározzuk a maximális teljes felvett hőhöz tartozó adiabata meredekségét, aminek $(-p_0/(4V_0))$-nak kell lennie, hiszen ez a lineáris szakaszt leíró egyenes meredeksége. Az ehhez a ponthoz tartozó adiabatának érintenie kell ezt az egyenest, mert ennek a pontnak a környezetében nulla a lokális hőcsere, vagyis itt az egyenes adiabataként viselkedik. Ebben a pontban $V^* = (20/7)\cdot V_0$, tehát

$$p^* = \frac{p_0}{4}\left(5 - \frac{V^*}{V_0}\right) = \frac{15}{28}p_0.$$

Az adiabata egyenletéből adódó számolás ugyanezt az eredményt adja a meredekségre:

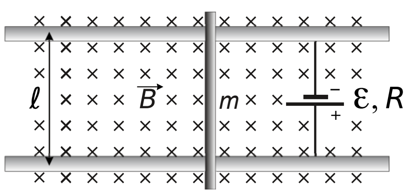
$$p = p^*\frac{(V^*)^{4/3}}{V^{4/3}},$$

amiből:

$$\left[\frac{dp}{dV}\right]_{V=V^*} = \left[-\frac{4}{3}p^*\frac{(V^*)^{4/3}}{V^{7/3}}\right]_{V=V^*} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{28}p_0\cdot\frac{1}{V^*} = -\frac{5}{7}p_0\frac{7}{20V_0} = -\frac{p_0}{4V_0}.$$

3. feladat

Elemmel működő mágneses játékágyút szeretne piacra dobni egy vállalkozás. Az eszköz működését a következő egyszerűsítő modellel lehet leírni: vízszintes síkon fekvő, párhuzamos sínpáron súrlódásmentesen mozoghat az ábrán látható m tömegű, vékony rúd, ami a játékágyú lövedékének felel meg. A sínek távolsága ℓ, a rúd mindig merőleges a sínekre. Állandó $\mathcal{E}$ elektromotoros erejű, R belső ellenállású telepet kapcsolunk a sínek közé. A rendszerben minden más ohmos ellenállás elhanyagolható. A rúd a sínekre merőleges, B nagyságú, homogén mágneses térben mozog, és nyugalomból indul. A $\vec{B}$ mágneses indukcióvektor az ábra síkjára merőlegesen befelé mutat.



a) Mekkora maximális sebességre gyorsulhat fel a rúd?

b) Mennyi idő alatt éri el a rúd a maximális sebességének a felét?

c) Határozzuk meg a szerkezet hatásfokát, ha a sínek korlátlanul hosszúak! Értelmezzük a hatásfokot úgy, hogy a telep elektromos energiacsökkenésének hány százaléka adja a rúd végső mozgási energiáját.

d) A fejlesztők úgy állították be a sínek hosszát, hogy a rúd a korlátlan sínhosszal elérhető maximális sebességnek csak a felével hagyja el a sínpárt. Határozzuk meg a hatásfokot ebben az esetben is!

Útmutatás: A megoldásban a radioaktív bomlás törvényének ismerete segíthet, továbbá kihasználhatjuk azt is, hogy minden exponenciális függvény hasonló. Így elkerülhetjük a differenciál- és integrálszámítás használatát.

1. Megoldás

a) A meginduló áram hatására a mágneses térben lévő rúdra balra mutató erő hat, ezért a rúd ebben az irányban gyorsulni kezd. A mozgó rúdban $U_{\mathrm{ind}} = B\ell v$ feszültség indukálódik, ami csökkenti az áramerősséget. Ha a sínpár korlátlanul hosszú, akkor a rúd olyan nagy maximális sebességet ér el, ami már az ε elektromotoros erővel megegyező indukált feszültséget hoz létre:

$$v_{\max} = \frac{\varepsilon}{B\ell}.$$

Ebben az esetben a körben folyó áram erőssége nullára csökken.

b) Írjuk fel a dinamika alapegyenletét:

$$ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = B\ell I = B\ell\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right) \quad \to \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(\frac{\varepsilon}{B\ell} - v\right) = \frac{B^2\ell^2}{mR}\left(v_{\max} - v\right).$$

Vezessük be az $N = v - v_{\max}$ helyettesítést. Ekkor

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)N,$$

ami analógiába hozható a radioaktív bomlás törvényével, ha a zárójelben lévő törtet a bomlásállandónak feleltetjük meg:

$$\lambda = \frac{B^2\ell^2}{mR}.$$

Bevezethetjük a felezési időt, továbbá megkaphatjuk a rúd sebességének időfüggését is:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \to \quad v = v_{\max}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}\right),$$

amiből láthatjuk, hogy éppen a felezési idő alatt éri el a rúd a maximális sebességének a felét:

$$t = T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{mR}{B^2\ell^2}\ln 2.$$

c) Korlátlanul hosszú sínpár esetén a rúd végső, maximális mozgási energiája:

$$E_{\text{mozg}}^{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2\ell^2}.$$

A feladatban a hatásfok kiszámításakor azt kell meghatároznunk, hogy ez a maximális mozgási energia hány százaléka a telep elektromos energiacsökkenésének. Rövid Δt idő alatt a telep energiacsökkenése:

$$\Delta W = \varepsilon I \Delta t = \varepsilon \left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R} \right) \Delta t.$$

A telep energiacsökkenése nemcsak a rúd mozgási energiáját növeli, hanem hőt is termel az R belső ellenálláson:

$$\begin{aligned}
\Delta Q = RI^2\Delta t &= R\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right)^2 \Delta t = (\varepsilon - B\ell v)\frac{(\varepsilon - B\ell v)}{R}\Delta t = \\
&= \varepsilon\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right)\Delta t - B\ell v\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right)\Delta t = \Delta W - \frac{\varepsilon B\ell v - B^2\ell^2 v^2}{R}\Delta t = \\
&= \Delta W - \Delta E_{\text{mozg}}.
\end{aligned}$$

A telep energiacsökkenésének időfüggését úgy kaphatjuk meg, ha felhasználjuk a rúdra már megkapott sebesség–idő függvényt:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta W}{\Delta t} = \varepsilon I &= \varepsilon\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right) = \frac{\varepsilon^2}{R} - \frac{\varepsilon B\ell}{R} v_{\max}\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}\right) = \\
&= \frac{\varepsilon^2}{R} - \left(\frac{\varepsilon B\ell}{R}\right)\left(\frac{\varepsilon}{B\ell}\right)\left(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}\right) = \frac{\varepsilon^2}{R}\cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

A telep energiacsökkenése megfeleltethető a jobb oldalon lévő (utolsó) függvény görbe alatti területének, ha ezt a függvényt ábrázoljuk az idő szerint. Ha az ε^2/R szorzótényezőt egységnyinek tekintjük, és használjuk az $x = t/T_{1/2}$ helyettesítést, akkor az

$$y = 2^{-x}$$

exponenciális függvény görbéjének pozitív x-ekre vett görbe alatti területéről van szó. Vizsgáljuk most a telep belső ellenállásán termelődő hő teljesítményét:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = RI^2 = R\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right)^2 = \frac{R}{\varepsilon^2}\left[\varepsilon\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right)\right]^2 = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{R}\cdot 4^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Az előző helyettesítéseket használva, a termelődő hőnek az

$$y = 4^{-x}$$

exponenciális függvény görbe alatti területe feleltethető meg. A két exponenciális függvény hasonló, lényegében a második függvény görbéjének x-tengellyel párhuzamos kétszeres nyújtásával hozhatjuk fedésbe a görbéket:

$$2^{-x} = 4^{-\frac{x}{2}}.$$

Mindebből az következik, hogy a telep energiacsökkenésének éppen a fele szolgálja a hőtermelést, míg a másik fele a mozgási energiát biztosítja. Tehát korlátlanul hosszú sínek esetén a játékágyú 50 %-os hatásfokú (függetlenül attól, hogy milyen paraméterű adatokkal méretezik).

d) Az előző számítások alapján fel tudjuk írni, hogy korlátlanul hosszú sínek esetében mekkorák az egyes energiaváltozások:

$$E_{\text{mozg}}^{\text{max}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2\ell^2}, \quad Q_{\text{teljes}} = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2l^2}, \quad \Delta W_{\text{teljes}} = \frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}.$$

Azt is láttuk, hogy a $T_{1/2} = \ln 2/\lambda$ felezési idő alatt csökken a rúd sebessége a felére, tehát ekkor a mozgási energiája a maximális mozgási energia negyede. Folytathatjuk az exponenciális függvények görbe alatti területének vizsgálatát, ami azon alapszik, hogy minden exponenciális függvény görbéje hasonló.

A telep elektromos energiacsökkenésének üteme (teljes teljesítmény) a felezési idő elérésekor a felére csökken. Az ezt követő terület az y-tengely menti kétszeres nyújtással hozható fedésbe az eredetivel, tehát a telep energiacsökkenése az indulástól a felezési időig ugyanakkora, mint a felezési időtől „végtelenig". Ha tehát a mozgási energia a felezési időig negyede a maximálisnak, míg a telep teljes energiacsökkenésének a fele történik meg eddig, így a hatásfok csak 25%-os.

Megjegyzés: Képletekkel is felírhatjuk az energiaváltozásokat:

$$E_{\text{mozg},1/2} = \frac{1}{8}mv_{\text{max}}^2 = \frac{m\varepsilon^2}{8B^2\ell^2};$$

$$\Delta W_{1/2} = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2\ell^2} \quad \rightarrow \quad Q_{1/2} = \Delta W_{1/2} - E_{\text{mozg},1/2} = \frac{3m\varepsilon^2}{8B^2\ell^2}.$$

A mozgás első felében tehát a teljes mozgási energiaváltozás negyede, a telep teljes energiacsökkenésének a fele, míg a teljes hőtermelődés háromnegyede játszódik le. Ezt az utóbbit ki tudjuk következtetni az exponenciális függvények görbe alatti területeiből is. A hőtermelődés ugyanis a felezési idő elérésekor negyedére csökken, tehát a hátralévő terület az egésznek csak a negyede. Vagyis valóban az indítástól a felezési idő eléréséig a hőtermelődés a teljes értéknek a háromnegyede.

2. Megoldás

Kalkulus használatával is megoldható a feladat. A mozgásegyenlet:

$$m\frac{dv}{dt} = B\ell I = B\ell\left(\frac{\varepsilon - B\ell v}{R}\right),$$

aminek a megoldása:

$$v = \frac{\varepsilon}{B\ell}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right).$$

a) Látszik, hogy hosszú idő után a sebesség a

$$v_{\text{max}} = \frac{\varepsilon}{B\ell}$$

értékhez tart.

b) A sebesség-idő függvényből kifejezhetjük a „felezési időt”:

$$\frac{v_{\max}}{2} = v_{\max}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t_{1/2}}\right) \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{mR}{B^2\ell^2}\cdot \ln 2.$$

c) A rúd maximális mozgási energiája:

$$E_{\text{mozg}}^{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}.$$

A körben folyó áramerősség:

$$I = \frac{\varepsilon - B\ell v}{R} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{B\ell}{R}\cdot\frac{\varepsilon}{B\ell}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}.$$

Az ellenálláson disszipálódó Joule-hő:

$$Q_{\text{teljes}} = \int_0^\infty I^2R\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\cdot\frac{mR}{2B^2\ell^2}\left[e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}\right]_\infty^0 = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2\ell^2}.$$

Látszik, hogy a teljes hő és a maximális mozgási energia ugyanakkora, a kettő összege a telep teljes energiacsökkenése, tehát a hatásfok 50%.

d) Az előzőhöz hasonlóan járhatunk el. A rúd mozgási energiája a felezési idő elteltekor:

$$E_{\text{mozg},1/2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}$$

Az ellenálláson disszipálódó Joule-hő:

$$Q = \int_0^{t_{1/2}} I^2R\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^{t_{1/2}} e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\cdot\frac{mR}{2B^2\ell^2}\left[e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t}\right]_{t_{1/2}}^0 = \frac{m\varepsilon^2}{2B^2\ell^2}\left(1 - e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t_{1/2}}\right)$$

Mivel

$$t_{1/2} = \frac{mR}{B^2\ell^2}\ln 2,$$

így

$$e^{-\frac{2B^2\ell^2}{mR}t_{1/2}} = \frac{1}{4},$$

ezért

$$Q_{1/2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}.$$

A telep energiacsökkenése:

$$\Delta W_{1/2} = -\int_0^{t_{1/2}} \varepsilon I\,dt = -\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^{t_{1/2}} e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\,dt = -\frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t_{1/2}}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{m\varepsilon^2}{B^2\ell^2}.$$

Az energiamérleg:

$$\Delta W_{1/2} + Q_{1/2} + E_{\text{mozg},1/2} = 0.$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{E_{\text{mozg},1/2}}{|\Delta W_{1/2}|} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	A dinamika alapegyenletének, a forgómozgás alapegyenletének és a tisztán gördülés feltételének felírása:	3 pont
	Annak az igazolása, hogy a henger tömegközéppontja harmonikus rezgőmozgást végez:	2 pont
	A keresett periódusidő helyes megadása:	1 pont
b)	A létrejövő mozgás helyes értelmezése:	3 pont
	A dinamika alapegyenletének és a forgómozgás alapegyenletének felírása:	2 pont
	Tisztán gördülés feltételének helyes megadása:	2 pont
	Annak az igazolása, hogy a henger tömegközéppontja harmonikus rezgőmozgást végez:	2 pont
	A keresett periódusidő helyes megadása:	1 pont
c)	A maximális sebességek helyes meghatározása:	4 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A maximális térfogat meghatározása:	4 pont
b)	A felvett hő-térfogat függvény megadása:	10 pont
c)	A hatásfok kiszámítása:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A rúd maximális sebességének kiszámítása:	2 pont
b)	A kérdéses idő meghatározása:	6 pont
c)	A hatásfok kiszámítása korlátlanul hosszú sínek esetében:	6 pont
d)	A hatásfok kiszámítása lerövidített sínek esetében:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.