Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA

II. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

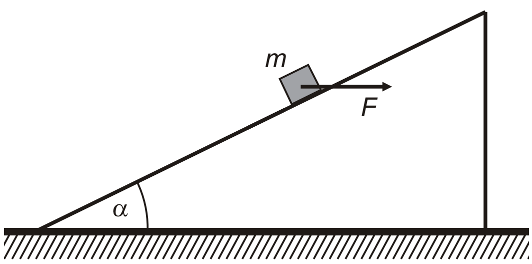
1. feladat

Egy α hajlásszögű, ék alakú, rögzített lejtőn m tömegű test súrlódásmentesen mozoghat.

a) Mekkora vízszintes irányú F erővel kell húznunk a testet, hogy kezdősebesség nélkül ugyanannyi idő alatt érjen fel a lejtő aljáról a tetejére, mint amennyi idő alatt a lejtő tetejére téve és elengedve kezdősebesség nélkül fentről leér?

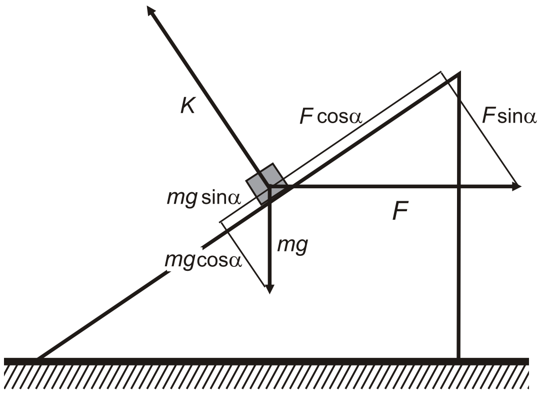
b) A lejtő rögzítése súrlódással is elérhető. Mekkora legyen az $M = 3m$ tömegű lejtő és a vízszintes talaj közötti tapadási súrlódás együtthatója, hogy az elegendően lapos lejtő ne csússzon meg a test felfelé haladása közben, ha az *a)* részben meghatározott F erőt fejtjük ki?

c) Vizsgáljuk meg, hogy a *b)* esetben egy 38°-os, homogén tömegeloszlású lejtő elegendően lapos-e, hogy a test felhúzása közben ne billenjen meg! És ha 42°-os a lejtő?



Megoldás

a) A feltétel szerint a le- és felfelé mozgás gyorsulása azonos, $a = g \sin \alpha$.



Bontsuk fel az erőket lejtővel párhuzamos, és arra merőleges összetevőkre. A merőleges komponensek összege nulla, a párhuzamosaké $ma = mg\sin\alpha$, tehát

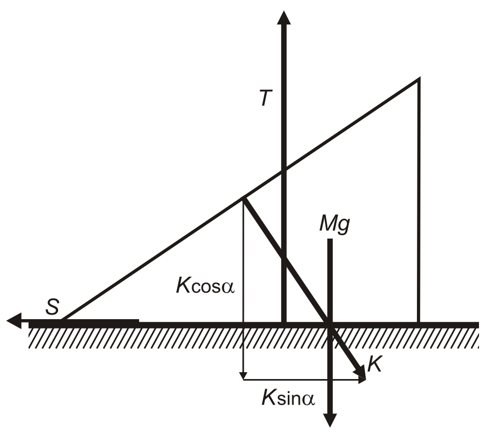
$$K = mg\cos\alpha + F\sin\alpha,$$

$$mg\sin\alpha = F\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Ez utóbbiból

$$F = 2mg\mathrm{tg}\,\alpha.$$

b)



A lejtőre a kis test K nyomóereje, az Mg nehézségi erő, valamint a talaj által kifejtett erő hat, amit a szokásos módon két összetevőre, a T tartóerőre és az S súrlódási erőre bontunk. Az egyensúly miatt ezek vízszintes és függőleges komponenseinek összege nulla, vagyis

$$T = Mg + K\cos\alpha,$$

$$S = K\sin\alpha.$$

A tapadási súrlódás miatt pedig

$$S \leq \mu T.$$

Ezek szerint

$$K\sin\alpha \leq \mu\left(Mg + K\cos\alpha\right). \tag{1}$$

Az *a)* részből

$$K = mg\cos\alpha + 2mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha = mg\left(\cos\alpha + 2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right),$$

vagyis

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha}\left(\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha\right) = \frac{mg}{\cos\alpha}\left(1+\sin^2\alpha\right). \tag{2}$$

Ezzel az (1) egyenlőtlenség

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\left(1+\sin^2\alpha\right)\sin\alpha \le \mu\left(3mg + \frac{mg}{\cos\alpha}\left(1+\sin^2\alpha\right)\cos\alpha\right),$$

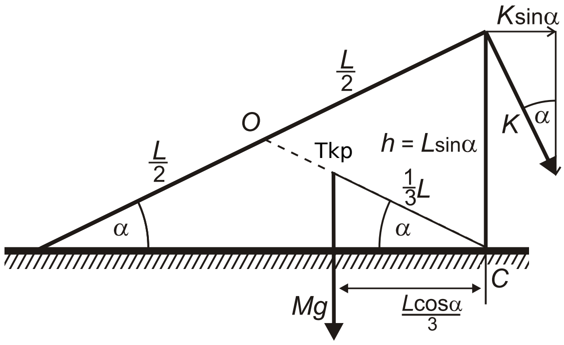
vagyis

$$\left(1+\sin^2\alpha\right)\mathrm{tg}\,\alpha \le \mu\left(4+\sin^2\alpha\right),$$

tehát

$$\mu \ge \frac{1+\sin^2\alpha}{4+\sin^2\alpha}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

c) A megbillenés a lejtő derékszögnél lévő C csúcsán átmenő tengely körül történhet meg.



A súrlódási erő és a talaj T tartóerejének hatásvonala a billenés előtti pillanatban átmegy a C csúcson, ezért ezek forgatónyomatéka (erre a tengelyre) nulla. A billenés nem következik be, ha a nehézségi erő forgatónyomatéka a folyamat során nagyobb (vagy egyenlő) a K erő forgatónyomatékával. Ez a nyomaték akkor a legnagyobb, ha a kis test a lejtő tetején van. A nehézségi erő hatásvonala átmegy a lejtő (későbbiekben háromszög) tömegközéppontján (súlypontján), ami a háromszög átfogójához tartozó súlyvonalának C csúcs felőli 2/3-ánál van. A háromszög köré írható kör O középpontja az átfogó felezőpontja, így a súlypont C-től való távolsága

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot L = \frac{1}{3}L,$$

és ezzel a nehézségi erő karja $L\cos\alpha/3$. Vagyis a lejtő nem billen meg, ha

$$K\sin\alpha\cdot L\sin\alpha \le Mg\cdot\frac{1}{3}L\cos\alpha.$$

Ebbe behelyettesítve K fenti (2) alakját és $M = 3m$-et:

$$\frac{mg}{\cos\alpha}\left(1+\sin^2\alpha\right)\cdot L\sin^2\alpha \le 3mg\cdot\frac{1}{3}L\cos\alpha,$$

végül egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$\left(1+\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha \leq \cos^2\alpha. \tag{3}$$

Végezzük el a behelyettesítéseket. Láthatjuk, hogy a 38°-os lejtő még nem billen (az egyenlőtlenség fennáll), de a 42°-os már billen (az egyenlőtlenség már nem igaz).

Megjegyzés: A lejtő felbillenésének határszögét a következőképpen számíthatjuk ki. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ miatt a (3) egyenlőtlenség így alakítható át:

$$\left(1+\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha \leq 1-\sin^2\alpha.$$

Ez $\sin^2\alpha$-ra másodfokú egyenlőtlenség. Legyen $\sin^2\alpha = x$, ezzel az egyenlőtlenség nullára redukált alakja

$$x^2+2x-1\leq 0.$$

A bal oldali kifejezés képe egy parabolát ír le, melynek minimuma van, tehát az egyenlőtlenség a két zérushely közötti x-ekre teljesül. A zérushelyek $x_1=-1-\sqrt{2}$, illetve $x_2=-1+\sqrt{2}$, vagyis az egyenlőtlenség megoldása $-1-\sqrt{2}\leq x\leq -1+\sqrt{2}$, amiből $-1-\sqrt{2}\leq \sin^2\alpha \leq -1+\sqrt{2}$. $\sin\alpha\geq 0$ miatt $0\leq\sin^2\alpha\leq -1+\sqrt{2}$, amiből

$$0\leq \sin\alpha\leq\sqrt{\sqrt{2}-1} \quad\rightarrow\quad 0\leq\alpha\leq 40{,}06°.$$

Hegyesszögek esetén a szinusz szigorúan monoton növekvő, ezért a lejtő nem billen meg, ha $\alpha\leq 40{,}06°$.

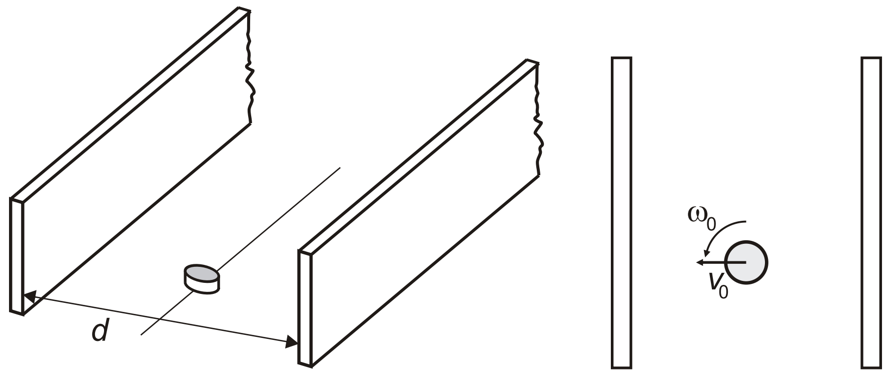
2. feladat

Két párhuzamos, elegendően hosszú, függőleges, rögzített fal távolsága $d=1\,\mathrm{m}$. A falak között pontosan középen egy $R=0{,}1\,\mathrm{m}$ sugarú, homogén korongot helyezünk a talajra. A korongot a súrlódásmentes talajon a falakra merőleges $v_0=2\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességgel úgy indítjuk el, hogy közben a középpontján átmenő függőleges tengelye körül $\omega_0=16\,\mathrm{s}^{-1}$ szögsebességgel forogjon. A csúszási súrlódási együttható értéke a korong és a fal között $\mu=0{,}1$.

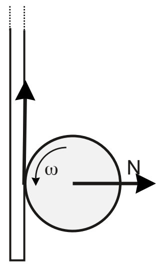
a) Mekkora lesz a korong tömegközéppontjának sebessége az első ütközés után?

b) Hol lesz a korong tömegközéppontja $t=0{,}8\,\mathrm{s}$ elteltével?

A korong fallal való pillanatszerű ütközésekor a deformációból származó energiaveszteségektől eltekinthetünk, azonban a súrlódásból származó veszteségtől nem.



Megoldás



a) Az első ütközés ideje alatt fellépő súrlódási erő csökkenti a forgás szögsebességét és növeli a tömegközéppont fallal párhuzamos irányú sebességét. Legyen a fallal párhuzamos irány az x irány, a falra merőleges az y irány. Az ütközés rövid ideje alatt fellépő súrlódási erő és a kényszererő kapcsolata:

$$S = \mu N. \tag{4}$$

Az ütközés rövid ideje alatt a felületre merőleges nyomóerő és a súrlódási erő is változik, a továbbiakban ezek átlagértékével számolhatunk. Írjuk fel a a tömegközéppontra a falra merőleges, illetve a fallal párhuzamos irányban az impulzustételt:

$$\overline{N}\Delta t = \Delta I_y = -2mv_0. \tag{5}$$

$$\overline{S}\Delta t = \Delta I_x = m\Delta v_x. \tag{6}$$

A tömegközéppont körüli forgásra a súrlódási erőnek van forgatónyomatéka, így az impulzusmomentum tétel alapján:

$$-\overline{S}\Delta t R = \Theta\Delta\omega. \tag{7}$$

A (4), (5) és (7) összefüggésekből:

$$-\mu\frac{2mv_0}{\Delta t}\Delta t R = \frac{1}{2}mR^2\Delta\omega, \quad \to \quad \Delta\omega = -\frac{4\mu v_0}{R} = -8\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

A tömegközéppont fallal párhuzamos irányú sebessége az ütközés teljes ideje alatt nő. Az (5), (6) és (7) egyenletek segítségével az első ütközés után az x irányú sebességváltozás:

$$\overline{S}\Delta t = m\Delta v_{1x},$$

azaz

$$\frac{2mv_0}{\Delta t}\cdot\mu\cdot\Delta t = m\Delta v_{1x},$$

amiből

$$\Delta v_{1x} = v_{1x} = 2\mu v_0 = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A tömegközéppont falra merőleges sebességének a nagysága nem változik, így az első ütközés utáni sebesség:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_{1x}^2} \approx 2{,}04\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A második ütközésre hasonló egyenleteket írhatunk fel, de vegyük észre, hogy az első ütközésben $\omega_0 = 16\,\mathrm{s}^{-1}$ kezdeti szögsebesség $\Delta\omega = 8\,\mathrm{s}^{-1}$-mal csökkent, ezért a másodikban a forgás a pillanatszerű ütközés „végén” áll meg. A korong fallal párhuzamos sebessége $v_{2x} = 0$ lesz, hiszen a második ütközés esetén a súrlódási erő iránya v_{1x} irányával ellentétes. Így a második ütközés után a korong a falra merőleges irányban v_0 sebességgel mozog. Az indítás és az első ütközés között eltelt idő:

$$t_1 = \frac{d/2 - R}{v_0} = 0{,}2\,\mathrm{s}.$$

Az első és a második ütközés között eltelt idő:

$$t_2 = \frac{d - 2R}{v_0} = 0{,}4\,\mathrm{s}.$$

A másodig ütközéstől a korong középpontja $t - (t_1 + t_2) = 0{,}2\,\mathrm{s}$ idő alatt a felezővonalra ér, és az indítási helytől $t_2 \cdot v_{1x} = 0{,}16\,\mathrm{m}$-rel távolodik el.

3. feladat

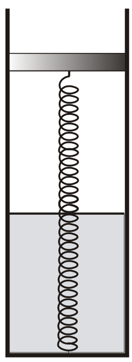
Függőlegesen álló hengerben 10 liter víz és 10 liter levegő található 1 °C hőmérsékleten. A hengert lezáró dugattyú felszíne $1\,\mathrm{dm}^2$, tömege 10 kg. A dugattyúhoz és a henger aljához 1000 N/m rugóállandójú rugó van rögzítve, ami kezdetben nyújtatlan. A hőmérsékletet lassan növeljük, a külső légnyomás 10^5 Pa.

a) Mennyit emelkedik a dugattyú, ha a hőmérsékletet 10 °C-ra növeljük?

b) Mennyit emelkedik a dugattyú, ha a hőmérsékletet 100 °C-ra növeljük?

c) Határozzuk meg a dugattyú emelkedését abban az esetben is, ha kezdetben a 20 liter térfogatú tartályban a levegő mellett mindössze 9 gramm víz található, és a rendszer hőmérsékletét a kezdeti 1 °C-ról 100 °C-ra emeljük!

Útmutatás: A megoldás során alkalmazzunk észszerű közelítéseket.



Megoldás

Jelölések: $p_\mathrm{k} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $M = 10\,\mathrm{kg}$, $A = 1\,\mathrm{dm}^2$, $V_0 = 10\,\mathrm{liter}$, $T_0 = (273 + 1)\,\mathrm{K}$, $\ell_0 = V_0/A = 1\,\mathrm{m}$, $T_1 = (273 + 10)\,\mathrm{K}$, $T_2 = T_3 = (273 + 100)\,\mathrm{K}$.

a) 10 °C-ig a telített vízgőz nyomása elhanyagolható. Ugyancsak elhanyagolható a víz hőtágulása, illetve a víz mennyiségének csökkenése a gőzképződés miatt, továbbá a víz hidrosztatikai nyomásának hatása (ez utóbbi három effektus a feladat *b)* részében is elhanyagolható). Kezdetben a bezárt levegő nyomása

$$p_0 = p_\mathrm{k} + \frac{Mg}{A} = 1{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa},$$

10 °C-on legyen p_1. A dugattyú elmozdulása legyen x_1. (A víz mintha ott sem lenne.) Felírhatjuk az egyesített gáztörvényt:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1},$$

ahol $V_1 = (\ell_0 + x_1)A$ és $p_1 = p_0 + Dx_1/A$. Másodfokú egyenletre jutunk:

$$\left(\frac{D\ell_0}{Ap_0}\right)\left(\frac{x_1}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{D\ell_0}{Ap_0} + 1\right)\left(\frac{x_1}{\ell_0}\right) + 1 - \frac{T_1}{T_0} = 0.$$

Legyen $y_1 = x_1/\ell_0$. A behelyettesítés után

$$0{,}909 y_1^2 + 1{,}91 y_1 - 0{,}0328 = 0,$$

aminek fizikailag értelmes megoldása $y_1 = 0{,}017$, azaz $x_1 = 1{,}7\,\mathrm{cm}$. (Vegyük észre, hogy a fenti másodfokú egyenlet minden tagja puszta szám, az ilyen egyenleteket dimenziótlannak hívjuk.)

b) Ebben az esetben már lényeges lesz a vízgőz parciális nyomása is, ami 100 °C-on éppen $p_\text{gőz} = 1\,\mathrm{atm} \approx 10^5\,\mathrm{Pa}$. A dugattyú elmozdulása legyen x_2 és a levegő parciális nyomása 100 °C-on pedig p_2. A térfogatra megint felírhatjuk, hogy $V_2 = (\ell_0 + x_2)A$, ahol ℓ_0 újra csak 1 méter. A levegő parciális nyomása eszerint $p_2 = p_0 + Dx_2/A - p_\text{gőz}$. Az egyesített gáztörvény ugyanolyan marad, mint az előzőekben. Újra másodfokú egyenletre jutunk:

$$\left(\frac{D\ell_0}{Ap_0}\right)\left(\frac{x_2}{\ell_0}\right)^2 + \left(\frac{D\ell_0}{Ap_0} + 1 - \frac{p_\text{gőz}}{p_0}\right)\left(\frac{x_2}{\ell_0}\right) + 1 - \frac{T_2}{T_0} - \frac{p_\text{gőz}}{p_0} = 0,$$

az $y_2 = x_2/\ell_0$ jelöléssel a behelyettesítés után

$$0{,}909 y_2^2 + y_2 - 1{,}27 = 0$$

adódik, amelynek fizikailag értelmes megoldása $y_2 = 0{,}75$, azaz $x_2 = 75\,\mathrm{cm}$.

c) Ebben az esetben olyan kevés a víz a rendszerben, hogy a folyamat végén teljesen gőzzé válik, ami jó közelítéssel ideális gázként viselkedik. A víz kezdeti térfogata olyan kicsiny, hogy elhanyagolható a levegő $2V_0 = 20$ liter térfogata mellett. A levegő anyagmennyisége:

$$n_1 = \frac{p_0 \cdot 2V_0}{RT_0} = 0{,}966\,\mathrm{mol}.$$

A víz mólszáma: $n_2 = 0{,}5\,\mathrm{mol}$. A folyamat során a levegő és a vízgőz alkotta gáz mólszáma megváltozik, ezért az egyesített gáztörvény helyett a végállapoti gázegyenletet írjuk fel:

$$p_3 V_3 = (n_1 + n_2)\,RT_3,$$

ahol $p_3 = p_0 + Dx_3/A$ és $V_3 = (2\ell_0 + x_3)A$. Újfent másodfokú egyenletre jutunk:

$$\left(\frac{D\ell_0}{Ap_0}\right)\left(\frac{x_3}{\ell_0}\right)^2 + \left(2\frac{D\ell_0}{Ap_0} + 1\right)\left(\frac{x_3}{\ell_0}\right) + 2 - 2\frac{T_3}{T_0} - \frac{n_2RT_3}{p_0A\ell_0} = 0,$$

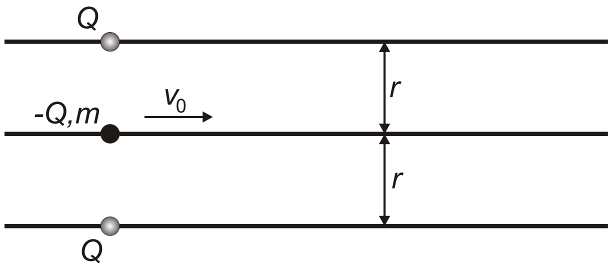
majd az $y_3 = x_3/\ell_0$ jelöléssel a behelyettesítés után

$$0{,}909y_3^2 + 2{,}82y_3 - 2{,}13 = 0$$

adódik, melynek fizikailag értelmes gyöke: $y_3 = 0{,}63$, azaz $x_3 = 63\,\mathrm{cm}$.

4. feladat

Súlytalanságban, mondjuk egy Föld körül keringő űrhajó belsejében a következő kísérletet végzik el: kifeszítenek három hosszú, vékony, elektromosan szigetelő huzalt közös síkban, egymással párhuzamosan. A szomszédos huzalok távolsága $r = 0{,}1\,\mathrm{m}$. A szélső huzalokra $Q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$, a középsőre $(-Q)$ töltésű, kicsiny gyöngyöket fűznek fel. Kezdetben a gyöngyök nyugalomban vannak, és a huzalokra merőlegesen egy egyenesbe esnek az ábrán látható módon. Egy adott pillanatban a középső, $m = 2{,}5\,\mathrm{g}$ tömegű gyöngynek $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ kezdősebességet adnak. Azt tapasztalják, hogy a szélső gyöngyök még azelőtt egyszerre megmozdulnak, hogy a középső gyöngy megállna. Ezért úgy változtatnak a rendszeren, hogy a gyöngyök és a huzalok közötti súrlódási együttható értéket azonos módon növelik meg. Meglepődve veszik észre, hogy akármekkorára is növekszik a súrlódási együttható, a szélső gyöngyök mindig egyszerre indulnak el a középső megállása előtt.



a) Igen nagy súrlódási együttható esetén határozzuk meg hozzávetőlegesen a középső gyöngy helyzetét abban a pillanatban, amikor a szélső gyöngyök megmozdulnak!

b) Mekkora sebességgel mozog ebben a pillanatban a középső gyöngy?

Megoldás

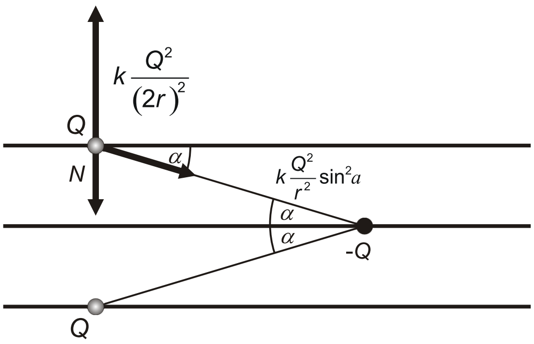
Két fontos észrevétel:

1.) Szimmetriából kifolyólag nem jelenik meg a középső szálra merőleges kényszererő, így a súrlódási tényező értékétől függetlenül súrlódási erő sem lesz ezen a szálon.

2.) Nagyon nagy tapadási súrlódási együttható esetén a két szélső gyöngy akkor mozdul meg, ha a rájuk ható, a huzalra merőleges nyomóerő nullává válik.

A feladat megoldása erre a két észrevételre épül.

a) Használjuk az ábra jelöléseit.



Mozduljon ki a középső gyöngy a kezdeti helyzethez képest x távolságra. Írjuk fel a szélső gyöngyökre ható merőleges nyomóerőt:

$$N = \frac{kQ^2}{(2r)^2} - \frac{kQ^2}{d^2}\sin\alpha,$$

ahol $d = \sqrt{x^2 + r^2}$ a középső és az egyik szélső gyöngy távolsága ekkor. Az ábrán jelölt α szögre felírhatjuk, hogy

$$\sin\alpha = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

N eltűnik, ha

$$x = r\sqrt{4^{2/3} - 1} = 0{,}123\,\mathrm{m},$$

illetve ekkor az α szög közelítőleg 39°-os.

b) A szélső gyöngyök megindulásáig mechanikai energiaveszteség nincs, így az energimegmaradásból

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 2k\frac{Q^2}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - 2k\frac{Q^2}{d}$$

következik, amiből v megkapható:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4kQ^2}{mr}\left(1 - \frac{1}{4^{1/3}}\right)} = 6{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Gyorsulások egyenlőségének megállapítása:	1 pont
	A lefelé történő mozgás gyorsulása:	1 pont
	A felfelé történő gyorsulás mozgásegyenletének meghatározása:	3 pont
	A keresett F erő megadása:	1 pont
b)	A vízszintes erőösszetevők meghatározása:	2 pont
	A függőleges erőösszetevők meghatározása:	2 pont
	A súrlódási együttható meghatározása:	4 pont
c)	A forgatónyomatékok egyensúlyának meghatározása:	4 pont
	Borul vagy nem borul a két megadott szögnél:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Az első ütközés folyamatának helyes elképzelése:	2 pont
	Az első ütközésben a tömegközéppontra vonatkozó impulzustételek és az impulzusmomentum tétel felírása:	6 pont
	A szögsebesség-változás helyes meghatározása:	2 pont
	A tömegközéppont fallal párhuzamos sebességkomponensének meghatározása:	2 pont
	Az első ütközés utáni sebesség meghatározása:	1 pont
b)	A második ütközés utáni sebesség helyes meghatározása:	4 pont
	A korong helyzetének a megadása $t = 0{,}8\,\mathrm{s}$ elteltével:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	Helyes gondolat:	4 pont
	Numerikus számítás:	2 pont
b)	Helyes gondolat:	4 pont
	Numerikus számítás:	2 pont
c)	Helyes gondolat:	6 pont
	Numerikus számítás:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

	Az 1. sz. észrevétel megfogalmazása:	4 pont
	A 2. sz. észrevétel megfogalmazása:	4 pont
a)	A szélső gyöngyre ható kényszererő megadása:	4 pont
	A középső gyöngy helyzetének megadása a megindulásakor:	2 pont
b)	Energiamegmaradás felírása:	4 pont
	A sebesség megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.