Oktatási Hivatal

**A 2019/2020. tanévi**
**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny**
**második forduló**

# FIZIKA

# I. kategória

## <u>Javítási-értékelési útmutató</u>

**A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.**

### 1. feladat

A képen egy szalagcsiszolót láthatunk, melynek nagy sebességgel mozgó szalagja hasonlít a lánctalpas járművek láncához. Mekkora minimális erővel tudjuk a falhoz szorítva tartani a működő gépet, ha függőleges téglafalat csiszolunk vele? A csiszolóvászonból készült szalag és a téglafal közötti csúszási súrlódási együttható $\mu$, a szerkezet tömege $m$.

### Megoldás

A szalagcsiszolóra három erő hat: a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő ($mg$); a fal által kifejtett erő, amit a szokásos módon két összetevőre bonthatunk, vagyis a vízszintes $N$ nyomóerőre és a függőlegesen felfelé mutató $S$ súrlódási erőre; valamint az általunk kifejtett ferde, alulról felfelé mutató tartóerő, amit szintén bontsunk függőleges és vízszintes összetevőkre ($K_x$ és $K_y$). A vízszintes és a függőleges erők egyensúlyát így írhatjuk fel:

$$N = K_x,$$

$$mg = \mu N + K_y.$$

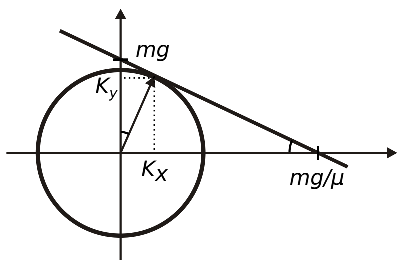
Ezekkel az egyenletekkel $K_x$ és $K_y$ között a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$K_y = mg - \mu K_x,$$

amit ha ábrázolunk a $K_x - K_y$ koordináta-rendszerben, akkor olyan egyenest kapunk, aminek tengelymetszete $mg$, továbbá meredeksége $(-\mu)$. A feladatban a kérdéses minimális $K$ tartóerő négyzetét így írhatjuk fel:

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2,$$

aminek a grafikonja az előzőekben megadott rendszerben egy origó körüli kör. A minimális erő feltétele az, hogy a kört érintse a fenti egyenes:




Az ábrán látható, origóból induló nyíl mutatja a minimális tartóerőt. Geometriai megfontolásokból (a $K_x$ és $K_y$ befogójú derékszögű háromszög hasonló az $mg$ és $mg/\mu$ tengelymetszeti befogójú nagy háromszöghöz) látható, hogy a minimális tartóerő esetében $K_x = \mu K_y$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$K_y = \frac{mg}{1+\mu^2} \quad \text{és} \quad K_x = \frac{\mu mg}{1+\mu^2},$$

vagyis

$$K = \frac{mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Érdekes, hogy bármely nem nulla $\mu$ esetén a minimális tartóerő kisebb a gép súlyánál.

*Megjegyzések:*

1. A megoldás elején leírt három erő hatásvonalának egy ponton kell átmennie. Mivel a nehézségi erő függőleges, így ez a pont a súlyponton átmenő függőleges egyenesen kell hogy legyen. Azonban ez a pont nem egyértelműen meghatározott. A tartóerő hatásvonala valahol metszi a súlyponton átmenő függőleges egyenest, és a fal kényszerereje automatikusan alkalmazkodik ehhez.

2. A feladat más módon is megoldható. Legyen a $K$ tartóerő függőlegessel bezárt szöge $\alpha$. Ennek segítségével a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$S + K\cos\alpha = mg,$$

$$N = K\sin\alpha,$$

$$S = \mu N.$$

Ezekből az egyenletekből kifejezhetjük a tartóerőt:

$$K = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

A tartóerőnek akkor van minimuma, ha a nevezőnek maximuma van. Érdemes a nevezőt beszorozni egy állandóval úgy, hogy a $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ együtthatóinak négyzetösszege 1 legyen, mert ekkor alkalmazhatjuk például a $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ trigonometrikus azonosságot:

$$\frac{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\alpha \equiv \cos(\alpha-\beta) \le 1.$$

Láthatjuk tehát, hogy a tartóerőnek $\alpha = \beta$ esetén valósul meg a minimuma, ahol a $\beta$ szögre a következő összefüggések teljesülnek:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Végezetül fejezzük ki a fenti két kifejezés hányadosát:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \mu.$$

Észrevehetjük, hogy a számtalan más esetből már jól ismert összefüggésre jutottunk. A minimális tartóerőt sokféle formában megadhatjuk:

$$K_{\min} = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha + \cos\alpha} = mg\cos\alpha = \frac{mg}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Jól látható, hogy a minimális tartóerő arányos a szalagcsiszoló súlyával, valamint a tartóerő függőlegessel bezárt szögének a koszinuszával, amennyiben ennek a szögnek a tangense megegyezik a csúszási súrlódási együttható értékével. Ez is azt mutatja, hogy a minimális tartóerő kisebb a szalagcsiszoló súlyánál, hiszen olyan csiszolóvászon nincs, amelynek 0 lenne a súrlódási együtthatója. Ha mégis lenne ilyen, akkor természetes, hogy a gépet a saját súlyát kiegyensúlyozó erővel kell tartanunk. Végezetül jegyezzük meg, hogy a $K$ tartóerő minimumának a megkeresése deriválással is történhet.

3. Szögek felhasználása nélkül is eljárhatunk. A fenti megoldásban a tartóerő kifejezhető pl. $N = K_x$ függvényében:

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 = N^2 + (mg - \mu N)^2.$$

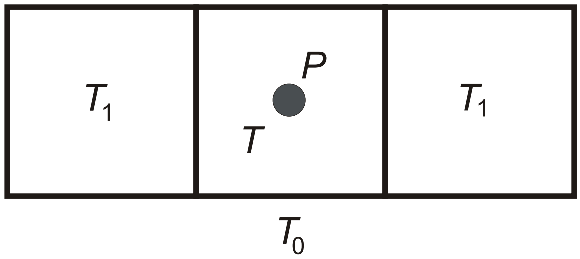
Ennek a másodfokú kifejezésnek a minimuma az $N = \mu mg/(1+\mu^2)$ helyen van. Ennél az $N$ értéknél $K^2$ minimuma:

$$K_{\min}^2 = \left[(mg-\mu N)^2 + N^2\right]\Big|_{N=\mu\frac{mg}{1+\mu^2}} = \frac{(mg)^2}{1+\mu^2},$$

azaz $K_{\min} = mg/\sqrt{1+\mu^2}$, egyezésben a korábbi eredménnyel.

**2. feladat**

Az ábrán látható, egyszintes épület három, egyforma, négyzet alapú, azonos belmagasságú szobából áll. Az épület teteje és az alja jól hőszigetelt, azonban az azonos anyagból készült falak nem. Az épületen kívüli hőmérséklet $T_0 = 8\,°\mathrm{C}$. A középen lévő szobában elhelyezünk egy hősugárzót, ami $P$ teljesítménnyel üzemel. Hosszú idő után a szoba hőmérséklete $T = 24\,°\mathrm{C}$ lesz.



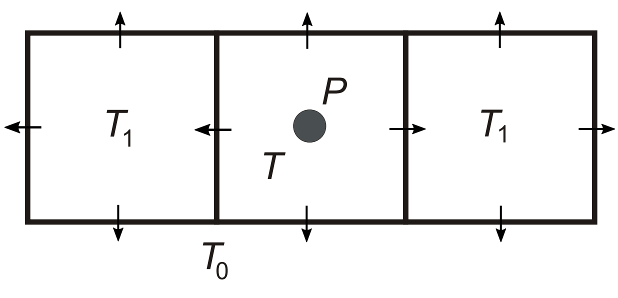

*a)* Mekkora a $T_1$ hőmérséklet a másik két szobában?

*b)* Mekkora lesz hosszú idő után az egyes szobák hőmérséklete, ha a hősugárzót átvisszük az egyik szélső szobába, és ott ugyanakkora teljesítményen üzemeltetjük?

*Útmutatás:* A falakon átmenő hőáram arányos a fal két oldalán lévő rész hőmérsékletének különbségével és a fal felületének nagyságával. A szobák ablakai és ajtajai a hőáram szempontjából falaknak számítanak.

**Megoldás**

Állandósult állapotban amennyi hő áramlik be egységnyi idő alatt az egyes szobákba, ugyanannyi áramlik is ki onnan. A hőáram, más szóval hőteljesítmény arányos a hőmérséklet-különbséggel, az arányossági tényezőben anyagi paraméter és a fal felületének területe szerepel. Mivel ez minden falra ugyanaz, ezért az egy falra vonatkozó arányossági tényező mindenhol legyen $\alpha$.

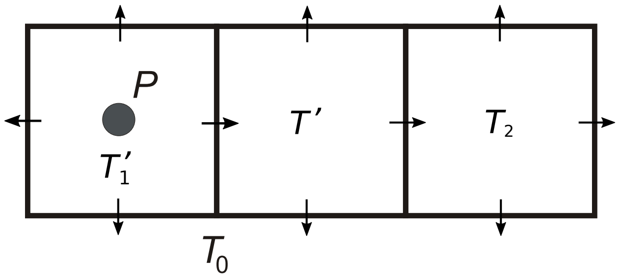



*a)* Írjuk fel a bemenő és a kimenő hőáramok teljesítményét a szélső szobákra:

$$\alpha(T - T_1) = 3\alpha(T_1 - T_0).$$

Innen adódik, hogy

$$T_1 = \frac{T + 3T_0}{4} = 12\,°\mathrm{C}.$$




*b)* Legyen a középső szoba hőmérséklete $T'$, annak a szélső szobának, ahol a hősugárzó van $T'_1$ és az üres másik szélsőé $T_2$. Ismét írjuk fel a bemenő és kimenő hőáramok egyenlőségét. Ahol a hősugárzó van:

$$P = \alpha(T'_1 - T') + 3\alpha(T'_1 - T_0), \tag{1}$$

a középső szobára:

$$\alpha(T'_1 - T') = 2\alpha(T' - T_0) + \alpha(T' - T_2), \tag{2}$$

illetve a másik szélső szobára:

$$\alpha(T' - T_2) = 3\alpha(T_2 - T_0). \tag{3}$$

Szükségünk van még egy egyenletre, ami a $P/\alpha$ hányadost adja meg. Ezt az első esetben a középső szobára felírható hőáramegyenletből kaphatjuk meg::

$$P = 2\alpha(T - T_1) + 2\alpha(T - T_0),$$

ahonnan

$$\frac{P}{\alpha} = 4T - 2(T_1 + T_0) = \frac{7(T - T_0)}{2} = 56\,°\mathrm{C}.$$

Az egyszerűség kedvéért helyettesítsük be az adatokat az (1), (2) és (3) egyenletekbe (a számok mértékegysége °C):

$$\begin{aligned} 56 &= 4T'_1 - T' - 24, \\ 4T' &= T'_1 + 16 + T_2, \\ 4T_2 &= T' + 24. \end{aligned}$$

Ezek megoldásával a kérdéses hőmérsékletek:

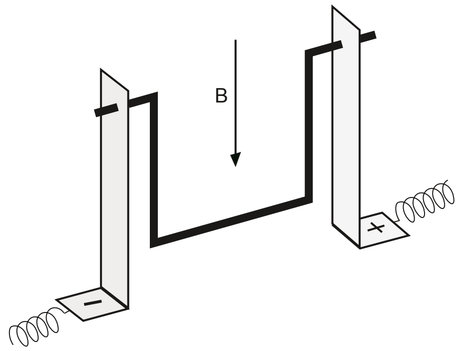
$$T' = 12\,°\mathrm{C}, \quad T'_1 = 23\,°\mathrm{C}, \quad T_2 = 9\,°\mathrm{C}.$$

*Megyjegyzés:* paraméteresen az eredmények:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{3T_0}{4} + \frac{T}{4}, \\ T'_1 &= \frac{T_0}{16} + \frac{15T}{16}, \\ T_2 &= \frac{15T_0}{16} + \frac{T}{16}. \end{aligned}$$

## 3. feladat

Az ábra szerint felfüggesztett fémkengyel minden szakasza $L = 0{,}2\,\mathrm{m}$ hosszú és $m = 10\,\mathrm{g}$ tömegű. A szerkezetet függőleges, $B = 0{,}2\,\mathrm{Vs/m^2}$ indukciójú, homogén mágneses térbe helyeztük. Ezután $I = 10\,\mathrm{A}$ erősségű áramot indítottunk a kengyelben. Mekkora lett a lengésideje, amikor már amplitúdója elegendően kicsire csökkent?

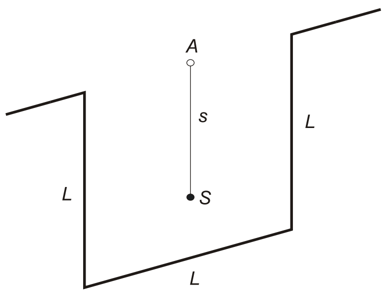



## 1. Megoldás

Az áram bekapcsolása után a kengyel kitér valamekkora szöggel, majd valamilyen új egyensúlyi helyzet körül végez (csillapodó) rezgéseket.

Először meghatározzuk a kengyel forgástengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát, valamint a forgástengely és az $S$ súlypont közötti távolságot. Mivel a tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség, ezért az 1. ábra alapján (mivel a tartószerkezethez vezető vízszintes csatlakozás tehetetlenségi nyomatéka messzemenően elhanyagolható):

$$\Theta = 2 \cdot \frac{1}{3}mL^2 + mL^2 = \frac{5}{3}mL^2.$$



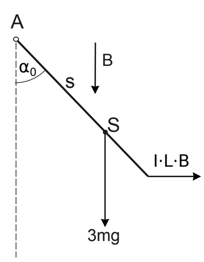

1. ábra

Az $AS = s$ távolság a tömegközéppont értelmezése alapján:

$$s = \frac{m\frac{L}{2} + m\frac{L}{2} + mL}{3m} = \frac{2}{3}L.$$

Ezek után határozzuk meg a kengyel új egyensúlyi helyzetét, amelyet az áram bekapcsolása után vesz fel. A tengelyre csak a vízszintes rúdra ható mágneses Lorentz-erőnek és a súlypontban összesíthető nehézségi erőnek van forgatónyomatéka. Erre az egyensúlyi helyzetre (2. ábra):

$$3mgs \cdot \sin\alpha_0 - BIL^2\cos\alpha_0 = 0.$$




2. ábra

Beírva $s$ értékét, majd rendezve az egyenletet:

$$2mgL\sin\alpha_0 = BIL^2\cos\alpha_0, \tag{4}$$

és a kengyel síkjának a függőlegessel bezárt szögére kapjuk, hogy:

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{BIL}{2mg} = 63{,}43^\circ.$$

Térítsük ki az óramutató járásával ellentétes irányba a kengyelt az egyensúlyi helyzetéből kicsiny $\Delta\alpha$ szöggel. A forástengelyre vonatkozó forgatónyomatékot ismét a kengyelre ható nehézségi erő és a vízszintes szárra ható Lorentz-erő adja:

$$\sum M = -\left(3mg\cdot\frac{2}{3}L\sin(\alpha_0+\Delta\alpha) - BIL\cdot L\cos(\alpha_0+\Delta\alpha)\right).$$

Használjuk fel az addíciós tételeket, továbbá azt, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ szögekre $\sin(\Delta\alpha)\approx\Delta\alpha$ és hogy $\cos(\Delta\alpha)\approx 1$:

$$\sum M = -(2mg\cos\alpha_0 + BIL\sin\alpha_0)L\cdot\Delta\alpha.$$

Látható, hogy ekkor az eredő forgatónyomaték visszatéríteni igyekszik a kengyelt az egyensúlyi helyzetébe, valamint a forgatónyomaték arányos a kitéréssel. Ezért a kengyel pontjai harmonikus rezgőmozgást végeznek. A rezgés periódusidejének meghatározásához írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét:

$$\sum M = \Theta\beta.$$

Beírva a tehetetlenségi nyomaték értékét és összehasonlítva az előző egyenlettel kapjuk, hogy:

$$\beta = -\frac{6mg\cos\alpha_0 + 3BIL\sin\alpha_0}{5mL}\cdot\Delta\alpha.$$

Innen leolvashatjuk, hogy a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{6mg\cos\alpha_0 + 3BIL\sin\alpha_0}{5mL}} \approx 11{,}6\frac{1}{\mathrm{s}},$$

ahonnan a kis rezgés periódusideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5mL}{6mg\cos\alpha_0 + 3BIL\sin\alpha_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{5mL}{3\sqrt{4m^2g^2 + B^2I^2L^2}}} \approx 0{,}54\,\mathrm{s}.$$

Kihasználtuk, hogy a lassú lengés miatt a mozgási indukciótól származó áram a 10 A mellett messzemenően elhanyagolható. Az áramforrás belső ellenállása nem hanyagolható el, mert a lengés az áramforrás és a kengyel ellenállásán disszipálódó Joule-hő miatt csillapodik. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy a csillapodás kicsi, ezért a rezgés alapfrekvenciája lényegében megegyezik a csillapodás nélküli rendszer sajátfrekvenciájával.

**2. Megoldás**

Az egyensúlyi $\alpha_0$ szöghelyzet megtalálása után a következőképp is eljárhatunk. A forgatónyomatékok egyensúlyából az is következik, hogy a mozgás változatlan marad, ha gondolatban a mágneses erőt megszorozzuk 3/2-del, és eltoljuk a súlypontba. A 3/2 azért kell, mert a mágneses erő erőkarja a súlypontban 2/3-ára csökken, tehát így a forgatónyomatéka nem változik.

Így viszont a súlypontra ható effektív nehézségi erőt határozhatunk meg, vagy más szavakkal a helyzet olyan, mintha másféle gravitációs gyorsulással lenne dolgunk:

$$Mg' = \sqrt{(Mg)^2 + \left(\frac{3}{2}BIL\right)^2},$$

ahol $M = 3m$. Innen

$$g' = \sqrt{g^2 + \left(\frac{BIL}{2m}\right)^2}.$$

Ha ezt a $g'$-t, illetve az első megoldásban felírt $\Theta$ és $s$ értékét beírjuk a fizikai inga ismert képletébe

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{Mg's}},$$

akkor azonnal megkapjuk a végeredményt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5mL}{3\sqrt{4m^2g^2 + B^2I^2L^2}}} = 0{,}54\,\mathrm{s}.$$

## Értékelési útmutató

**1. feladat**

| | | |
|---|---|---|
| | Erők helyes felismerése: | 5 pont |
| | Statikai egyenletek helyes felírása: | 5 pont |
| | Minimális tartóerő meghatározása: | 10 pont |
| | Összesen: | **20 pont** |

**2. feladat**

| | | |
|---|---|---|
| *a)* | A kimenő és bemenő hőáramok egyenlőek: | 2 pont |
| | A szélső szobára felírt bemenő hőáram: | 1 pont |
| | A szélső szobára felírt kimenő hőáram: | 1 pont |
| | A kérdéses hőmérséklet értéke: | 1 pont |
| *b)* | A bemenő és kimenő hőáramok azonossága arra a szobára, ahol a hősugárzó van: | 3 pont |
| | A bemenő és kimenő hőáramok azonossága a középső szobára: | 3 pont |
| | A bemenő és kimenő hőáramok azonossága a szélső szobára: | 3 pont |
| | A bemenő és kimenő hőáramok azonossága az *a)* esetbeli középső szobára: | 3 pont |
| | A kérdéses hőmérsékletek értékei: | $3\times 1$ pont |
| | Összesen: | **20 pont** |

**3. feladat**

| | | |
|---|---|---|
| | A tömegközéppont forgástengelytől való távolságának meghatározása: | 2 pont |
| | A kengyel forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának meghatározása: | 2 pont |
| | A kengyel új egyensúlyi helyzetének meghatározása: | 4 pont |
| | A kis kitérésre megadott forgásegyenlet: | 4 pont |
| | A harmonikus rezgőmozgás létrejöttének felismerése: | 4 pont |
| | A lengésidő meghatározása: | 4 pont |
| | Összesen: | **20 pont** |

**A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.**