Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

FIZIKA

II. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

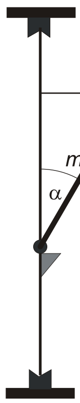
1. feladat

Az ábrán látható, jól csapágyazott, vékony, függőleges oszlop $\omega = 5\,\text{radián/s}$ szögsebességgel forog. Vele együtt forog a vízszintes fonállal hozzá rögzített $L = 40\,\text{cm}$ hosszúságú, homogén tömegeloszlású, $m = 0{,}5\,\text{kg}$ tömegű rúd is. A rúd alsó végét egy, a vízszintes tengely körüli elfordulást megengedő csukló tartja. A rúd a függőlegessel $\alpha = 30°$-os szöget zár be. A rendszerben súrlódás nincs, és a rúdon kívül minden forgó alkotórész tömege elhanyagolható.

a) Mekkora erővel húzza a fonál a rudat?

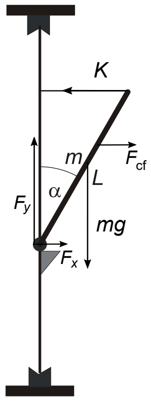
b) Mekkora a függőleges tengely körüli forgás szögsebessége a fonal elégetése után, amikor a rúd már éppen a vízszintes helyzetébe érkezik?

c) Mekkora a rúd alsó végpontján átmenő, a rúdra merőleges, vízszintes tengely körüli forgás szögsebessége, amikor a rúd már éppen a vízszintes helyzetébe érkezik?



Megoldás

a) A kérdésre a legegyszerűbben a rúddal együtt forgó koordinátarendszerben kaphatjuk meg a választ. Ebben a rendszerben a rúd egyensúlyi állapotban, nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője, illetve a fellépő forgatónyomatékok összege nulla. A K kötélerő, az mg nehézségi erő és az F csuklóerő mellett figyelembe kell vennünk a forgó rendszerben fellépő F_{cf} centrifugális erőt is.



Függőleges irányban a nehézségi erőt a csuklóerő F_y függőleges komponense egyenlíti ki:

$$F_y = mg = 4{,}9\,\mathrm{N}. \tag{1}$$

Vízszintes irányban az erőegyensúlyt a

$$K = F_x + F_{\mathrm{cf}} \tag{2}$$

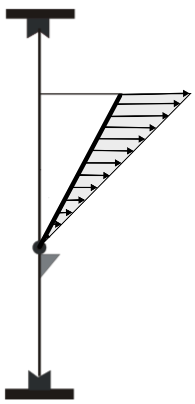
egyenlet fejezi ki, ahol a centrifugális erő

$$F_{\mathrm{cf}} = m\omega^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha \tag{3}$$

alakú. A rúd minden darabkájára centrifugális erő hat, melyek összege a (3) egyenlettel adható meg. A kötélerő meghatározásakor érdemes a forgástengelyt a csukló helyére választani, és erre a tengelyre felírni a nyomatéki egyenletet:

$$mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha + F_{\mathrm{cf}} \cdot \frac{2}{3} \cdot L\cos\alpha = KL\cos\alpha. \tag{4}$$

Az egyenlet felírásánál felhasználtuk azt a tényt, hogy a centrifugális erő támadáspontját a rúd csuklótól mért 2/3-ába kell raknunk. Ezt például úgy láthatjuk be, hogy gondolatban kis darabokra osztjuk a rudat, melyekre az ábrán látható módon berajzoljuk az elemi centrifugális erő összetevőket.



Így egy olyan háromszöghöz jutunk, ami megfeleltethető egy egyenletes vastagságú, háromszög alakú, homogén lapnak, melyre vízszintes irányú „nehézségi erő” hat. Az eredő erő a súlypontba tehető, és a hatásvonala mentén eltolható.
Hasonló magyarázatot találhatunk Holics László: A fizika OKTV feladatai és megoldásai 1961-2003 könyvében a 297. oldalon, ahol az OKTV 1983. évi második fordulós feladatait ismerteti.
(4) mindkét oldalát $L\cos\alpha$-val osztva a kötélerő megkapható:

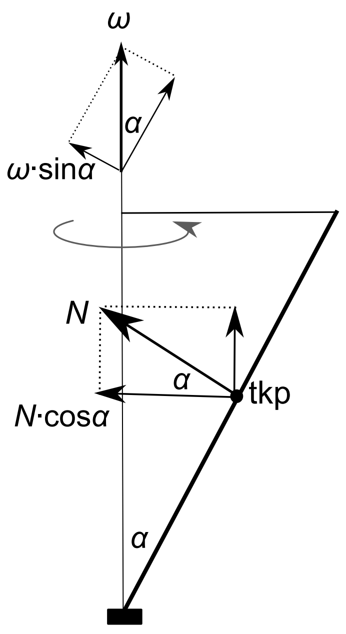
$$K = \frac{1}{2}mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{1}{3}m\omega^2 L\sin\alpha = 2{,}25\,\mathrm{N}. \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy a kötélerő kiszámításához nem szükséges a csuklóerő meghatározása.

A kötélerő nemcsak forgó rendszerben, hanem inerciarendszerben is kiszámítható. Ismeretes az analógia a haladó és a forgó mozgás dinamikája között. Haladó mozgás esetén a lendület időbeli megváltozását a testre ható erők eredője adja meg. Forgó mozgás esetén a test tömegközéppontjára vonatkozó perdület időbeli megváltozását a forgatónyomatékok összege határozza meg. Ennek megfelelően meg kell határoznunk a forgó rúd tömegközéppontra vonatkozó perdületét, majd ennek a megváltozását, amit egyenlővé kell tenni a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatékok összegével:

$$\sum M = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

A perdület $\Theta\omega$ alakban adható meg. A rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő és a rúdra merőleges tengely körül $mL^2/12$. A függőleges tengely irányú szögsebességet felbonthatjuk rúdra merőleges és azzal párhuzamos komponensekre. Mivel a vékony rúd tehetetlenségi nyomatéka a hossztengelye körüli forgásra nézve zérus, ezért csak a rúdra merőleges szögsebesség összetevőt ($\omega\sin\alpha$) kell figyelembe vennünk.



Így a kérdéses perdület

$$N = \frac{1}{12} m L^2 \omega \sin\alpha. \tag{6}$$

Ez a perdület vektor ω szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. Tehát függőleges komponense nem változik, csak a vízszintes összetevője (azaz $N \cdot \cos\alpha$) végez egyenletes körmozgást. A perdület időbeli megváltozása így

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = N\omega \cos\alpha \tag{7}$$

(a körmozgás esetén érvényes $v = r\omega$-val analógiában). A forgatónyomatékokat a tömegközéppontra nézve három tag összegeként írhatjuk fel:

$$\sum M = K \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\alpha + F_x \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\alpha - F_y \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha, \tag{8}$$

ahol F_x-et a sugárirányú centripetális erőből határozhatjuk meg:

$$K - F_x = m\omega^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha. \tag{9}$$

Természetesen F_y most is az mg nehézségi erőt egyenlíti ki:

$$F_y = mg.$$

(7) bal oldalát egyenlővé téve a (8) nyomatékösszeggel a (6)-(9) egyenletekből a kötélerő kiszámítható, és értéke megegyezik a forgó koordinátarendszerben számolt (5)-tel.

Az inerciarendszerbeli leírás részletesebb tárgyalása megtalálható Holics László korábban említett könyvében az előbb idézett helyen.

b) A megoldást inerciarendszerben folytatjuk. A kérdés megválaszolásához azt kell észrevennünk, hogy a rúd csuklóra vonatkoztatott perdületének függőleges összetevője nem változik, mivel a nehézségi erő forgatónyomatékának nincs függőleges komponense. Így a függőleges tengelyre nézve

$$\sum M_y = 0, \quad \rightarrow \quad \sum N_y = \text{állandó}.$$

Közvetlenül a fonál elégetése után a rúd tehetetlenségi nyomatéka a csuklón átmenő függőleges tengelyre $(mL^2 \sin^2\alpha)/3$, szögsebessége ω, tehát perdülete $(mL^2\omega \sin^2\alpha)/3$. A rúd vízszintes helyzetében tehetetlenségi nyomatéka ugyanerre a tengelyre nézve: $(mL^2)/3$, szögebessége pedig legyen ω'. A perdületmegmaradás alapján:

$$\frac{1}{3} m \left(L\sin\alpha\right)^2 \omega = \frac{1}{3} m L^2 \omega', \quad \rightarrow \quad \omega' = \omega \sin^2\alpha = 1{,}25\,\frac{\text{radián}}{\text{s}}.$$

c) A lebillenő rúd a vízszintes forgástengely körül nem egyenletesen gyorsuló forgómozgást végez. A mechanikai energia megmaradásából számíthatjuk ki az erre a tengelyre vonatkozó ω'' szögsebességet:

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m \left(L\sin\alpha\right)^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m L^2 \omega'^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} m L^2 \omega''^2,$$

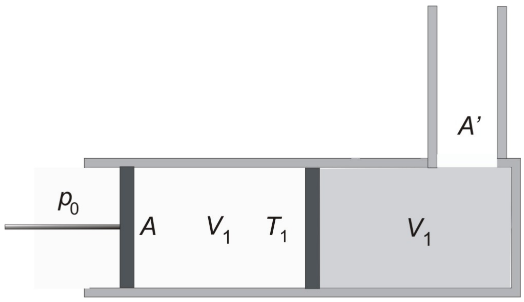
amiből

$$\omega'' = \sqrt{\frac{3g}{L}\cos\alpha + \omega^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha} = 8{,}3\,\frac{\text{radián}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés: A szögsebesség vektorjellege miatt lehet a forgási energiát a fenti módon két tag összegeként felírni.

2. feladat

Az $A = 4\,\mathrm{dm}^2$ négyzet keresztmetszetű, hőszigetelt tartály jobb oldali részét higany tölti ki az ábrán látható mértékben. A tartályban két, szintén hőszigetelő, könnyen mozgó, elfordulni nem tudó dugattyú van, amelyek azt két, egyenlő, $V_1 = 12\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú részre osztják. A bal oldali részben $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű levegő van. A külső légnyomás 10^5 Pa. A bal oldali dugattyút kezdetben nyugalomban tartjuk, majd egy adott pillanatban $v = 1$ cm/s állandó sebességgel tolni kezdjük. Egy idő múlva a tartály jobb oldali részéhez csatlakozó függőleges, $A' = 1{,}5\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű csőben a higany $h = 50\,\mathrm{cm}$-t emelkedik. Ekkor a bal oldali dugattyút megállítjuk.



a) Mekkora lesz a bezárt levegő nyomása, térfogata és hőmérséklete a folyamat végén?

b) Mekkora a két dugattyú elmozdulása eddig?

c) Mekkora átlagos sebességgel mozog a másik dugattyú?

d) Hányszor nagyobb erőt fejtünk ki a folyamat végén, mint az elején?

e) Mennyi munkát végeztünk összesen?

Megoldás

a) A középen levő dugattyú a folyamat során végig egyensúlyban van. Rá a higany balra mutató erőt fejt ki (a dugattyú tetején kevesebbet, alul többet), amelynek nagysága a külső légköri nyomásból és a higany hidrosztatikai nyomásából származik. A bal oldali részben lévő levegőnek ugyanekkora erőt kell kifejtenie, hogy az egyensúly fennálljon. A mozgás során a nyomás a megemelkedő higanymennyiség nyomástöbbletével nő. A jobb oldali részben a higany kezdeti nyomásmaximuma a tartály alján:

$$p_{\max} = \rho g \sqrt{A},$$

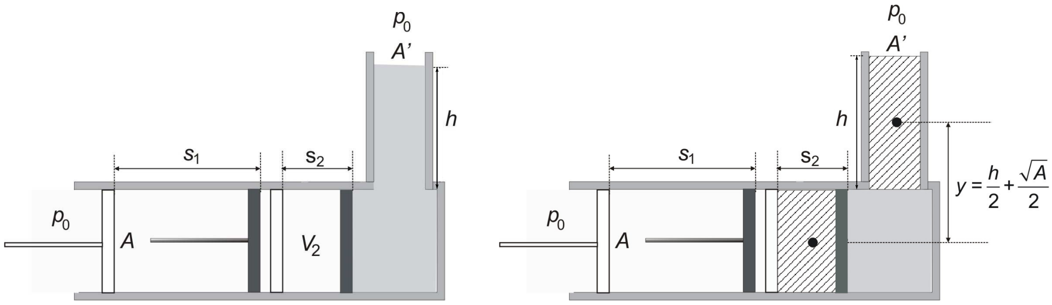
ahol $\rho = 13600\ \mathrm{kg/m^3}$ a higany sűrűsége, $\sqrt{A}$ a négyzet keresztmetszetű tartály magassága. Mivel a nyomás a magassággal lineárisan változik, így számolhatunk átlagos nyomással:

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\rho g \sqrt{A} = 13300\,\mathrm{Pa}.$$

(*Megjegyzés:* Kör keresztmetszet esetén nem számolható így a nyomás átlagértéke.) A teljes nyomás kezdetben:

$$p_1 = p_0 + \bar{p} = p_0 + \frac{1}{2}\rho g\sqrt{A} = 113300\,\mathrm{Pa}.$$

A következő két ábra a véghelyzetet mutatja, és azt, hogy a megemelkedett higanymennyiség honnan hova került, azaz mennyivel nőtt a helyzeti energiája.



A végállapotbeli nyomás (mindkét oldalon)

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho g\sqrt{A} + \rho g h + p_0 = 1{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

A bezárt levegő végső térfogata az adiabatikus összefüggés alapján (mivel a rendszer hőszigetelt és $\kappa = 7/5$):

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \quad \rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} V_1 = 8{,}6\,\mathrm{dm}^3.$$

A bezárt levegő hőmérséklete a gáztörvény alapján:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 342\,\mathrm{K}.$$

Tehát a végső nyomás és hőmérséklet: $p_2 = 1{,}8 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ és $T_2 = 342\,\mathrm{K}$.
b) A lassan, egyenletesen mozgó, jobb oldali dugattyú véghelyzetig megtett útja a higany összenyomhatatlansága miatt:

$$s_2 A = hA' \quad \rightarrow \quad s_2 = \frac{A'}{A} h = 0{,}19\,\mathrm{m}.$$

A bal oldali dugattyú útja ezalatt:

$$s_1 = \frac{V_1 - V_2}{A} + s_2 = 0{,}27\,\mathrm{m}.$$

(Ez kevesebb, mint a tartály fél hossza: $l = V/A = 3\,\mathrm{dm}$.)
c) A mozgás ideje az első dugattyú adataival meghatározható:

$$t = \frac{s_1}{v} = 27\,\mathrm{s}.$$

A jobb oldali dugattyú *átlagos* sebessége tehát:

$$v_{\mathrm{j}} = \frac{s_2}{t} = 0{,}69\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

d) A higany által kifejtett erő a folyamat elején:

$$F_{\mathrm{Hg}_1} = \bar{p}A = \frac{1}{2}\rho g A\sqrt{A} = 532\,\mathrm{N}.$$

Az általunk kifejtett erő ugyanekkora, ui. a légkör nyomásából származó erő mindkét oldalon azonos, így kiejtik egymást. Ugyanez a folyamat végén:

$$F_{\mathrm{Hg}_2} = p_2 A - p_0 A = 3190\,\mathrm{N}.$$

A két erő aránya:

$$\frac{F_{\mathrm{Hg}_2}}{F_{\mathrm{Hg}_1}} = 1 + \frac{2h}{\sqrt{A}} = 6.$$

e) Az általunk végzett W munka és a légköri nyomásból származó erő által végzett munka összege szolgáltatja a higanyszint emelkedése következtében megnőtt helyzeti energiát (lásd az ábrát!), a függőleges csőben a légkör emelésére fordított energiát, valamint a bezárt, adiabatikusan összenyomott levegő belsőenergia-növekedését. Képletben:

$$W + p_0 A s_1 = \rho g h A'\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A}\right) + p_0 A' h + \Delta E_\mathrm{b}.$$

A bezárt, összenyomott levegő belső energiájának növekedése:

$$\Delta E_\mathrm{b} = \frac{f}{2} N k \Delta T = \frac{f}{2}\frac{p_1 V_1}{T_1}\left(T_2 - T_1\right) = 480\,\mathrm{J}.$$

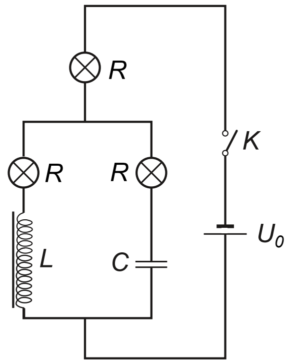
Ezzel a munkavégzésünk:

$$W = \rho g h A'\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A}\right) + p_0 A' h - p_0 A s_1 + \frac{f}{2}\frac{p_1 V_1}{T_1}\left(T_2 - T_1\right) = 490\,\mathrm{J}.$$

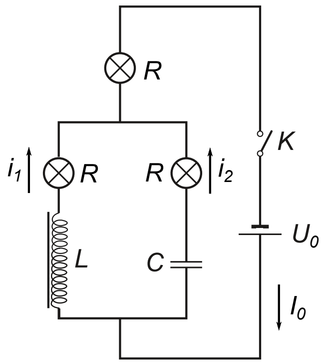
Megjegyzés: A numerikus eredményeket $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel számítottuk ki. Aki $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$-tel számol, kissé eltérő eredményekre jut.

3. feladat

A mellékelt ábrán lévő áramkörben U_0 állandó feszültségű egyenáramú áramforrásra párhuzamosan kapcsoltak egy L induktivitású tekercset és egy C kapacitású, töltetlen kondenzátort. Mindegyik ágban van egy fényforrás, melyek fényereje függ a rajtuk átfolyó áram erősségétől, de R ellenállásuk nem függ a fényerejüktől. Adott L és C esetén mekkora legyen R, hogy a főágban lévő fényforrás a K kapcsoló zárását követően időben állandó fényerővel világítson?



Megoldás
A megoldás a következő három észrevételre épül:



1. A két mellékágban az áramok összege időben állandó:

$$i_1 + i_2 = I_0 = \frac{U_0}{2R}.$$

2. Ebből az is következik, hogy a mellékági áramok megváltozásának összege (Δt idő alatt) nulla:

$$\Delta i_1 + \Delta i_2 = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta i_2}{\Delta t}.$$

3. A két mellékágra jutó feszültség is állandó, mégpedig

$$\frac{U_0}{2} = RI_0.$$

Írjuk fel a két mellékágra a feszültségeket, majd fejezzük ki a mellékági áramokat:

$$\frac{U_0}{2} = Ri_1 + L\frac{\Delta i_1}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad i_1 = \frac{U_0}{2R} - \frac{L}{R}\frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$

és

$$\frac{U_0}{2} = Ri_2 + \frac{q}{C} \quad \rightarrow \quad 0 = R\frac{\Delta i_2}{\Delta t} + \frac{1}{C}\frac{\Delta q}{\Delta t} = R\frac{\Delta i_2}{\Delta t} + \frac{i_2}{C} \quad \rightarrow \quad i_2 = -RC\frac{\Delta i_2}{\Delta t},$$

ahol kihasználtuk, hogy a kondenzátor q töltésének időbeli megváltozása megadja a kondenzátor áramát, valamint azt is, hogy az állandó feszültség megváltozása nulla. Adjuk össze a két mellékági áramot:

$$I_0 = \frac{U_0}{2R} = i_1 + i_2 = \frac{U_0}{2R} - \frac{L}{R}\frac{\Delta i_1}{\Delta t} - RC\frac{\Delta i_2}{\Delta t} = \frac{U_0}{2R} + \left(\frac{L}{R} - RC\right)\frac{\Delta i_2}{\Delta t},$$

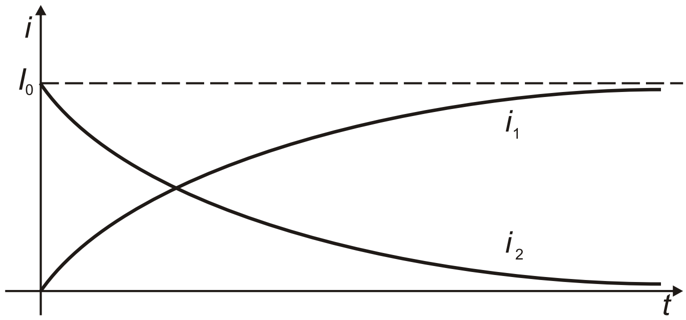
ahol kihasználtuk, hogy a mellékági áramok időbeli megváltozásainak összege nulla. A fenti kifejezés csak akkor teljesülhet, ha a zárójelben lévő kifejezés nulla, vagyis:

$$\frac{L}{R} - RC = 0,$$

amiből a kérdéses R ellenállás értéke:

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Megjegyzések: A feladat differenciálszámítás segítségével is megoldható. A folyamatot leíró differenciálegyenletek megoldása azonban kikerülhető, ha analógiába állítjuk a felállított differenciálegyenleteket például a radioaktív bomlások jól ismert egyenleteivel. A következő ábrán a mellékági áramok időbeli le- és felfutása látható $R = \sqrt{L/C}$ esetén:



melyek a következő függvényeknek felelnek meg:

$$i_1 = \frac{U_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

és

$$i_2 = \frac{U_0}{2R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

A feladat teljes értékűen megoldható úgy is, ha észrevesszük, hogy a soros RL-kör és a soros RC kör időállandóját kell egyenlővé tenni ahhoz, hogy a főágban az áramerősség időben állandó legyen.

A feladat megoldásában a váltóáramú ellenállások (impedanciák) használata elvileg hibás, hiszen az áramköri elemeket nem váltófeszültségre, hanem egyenfeszültségre kapcsoljuk.

Megemlíthetjük azt is, hogy (egy számfaktortól eltekintve) dimenzióanalízissel is megkapható az eredmény, bár ez a megoldás nem számít teljes értékűnek, hiszen nem mutatja meg, hogy a számfaktor 1.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	A fonálerő kiszámítása:	10 pont
b)	A függőleges tengely körüli forgás fordulatszámának meghatározása a perdület megmaradása alapján:	5 pont
c)	A vízszintes tengely körüli forgás szögsebességének meghatározása a mechanikai energia megmaradása alapján:	5 pont
	Összesen:	**20 pont**

Megjegyzés: Ha a versenyző a centrifugális erő támadáspontját a tömegközéppontba teszi, akkor az *a)* részre legfeljebb fele pontszámot kaphat.

2. feladat

a)	A térfogat- és nyomásviszonyok helyes felismerése:	2 pont
	A nyomás, térfogat és hőmérséklet helyes meghatározása:	6 pont
b)	A két dugattyú elmozdulásának meghatározása:	2 pont
c)	A dugattyú átlagsebességének meghatározása:	2 pont
d)	A folyamat elején és végén kifejtett erők helyes arányának megadása:	3 pont
e)	Az általunk végzett munka helyes meghatározása:	5 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

Annak felismerése, hogy a két mellékágban az áramok összege időben állandó:	3 pont
Annak felismerése, hogy a mellékági áramok megváltozásának összege nulla:	3 pont
Annak felismerése, hogy a két mellékágra jutó feszültség állandó:	3 pont
Egyenletek felírása:	3 pont
Egyenletek rendezése:	4 pont
A keresett ellenállás meghatározása:	4 pont
Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.