A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2. forduló

FIZIKA

II. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

Előfordulhat, hogy valamelyik feladat megoldása során olyan egyenlet adódik, amelyiket csak numerikusan lehet megoldani. A numerikus értékek meghatározásánál három értékes jegynél pontosabb számolásra nincs szükség.

1. feladat

Egy távoli ország diktátora fenyegető ballisztikus rakétakísérletet hajt végre. A rakétát az első kozmikus sebességgel indítják a Déli-sarkról, és a rakéta az Egyenlítőnél csapódik be a tengerbe.

a) Határozzuk meg a rakéta ellipszis alakú pályájának fél nagytengelyét!

b) A függőlegeshez képest milyen szögben indult és milyen szögben csapódott be a rakéta?

c) Maximálisan mekkora távolságra távolodott el a rakéta a Föld felszínétől?

d) Mennyi idő telt el a kilövéstől a becsapódásig?

Útmutatás:

1. Első kozmikus sebességnek azt nevezzük, amellyel a Föld közvetlen közelében körpályán keringő mesterséges holdak mozognak.

2. Egy Föld körül ellipszispályán keringő mesterséges hold teljes mechanikai energiája
$$E = -\gamma \frac{mM}{2a}$$
alakban adható meg, ahol γ az egyetemes gravitációs állandó, m a mesterséges hold tömege, M a Föld tömege, $2a$ pedig az ellipszispálya nagytengelye.

3. A számítások során a Földet tekintsük 6400 km sugarú gömbnek, továbbá hanyagoljuk el a légkör, illetve a Föld forgásából és keringéséből adódó korrekciókat.

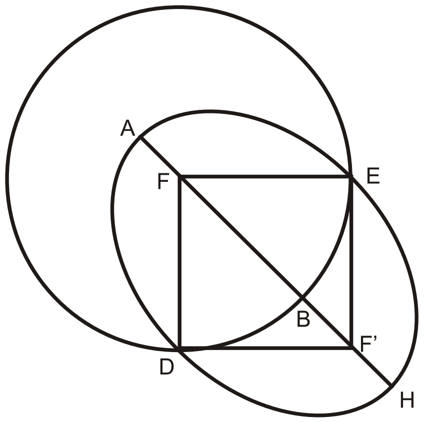
Megoldás

a) Az útmutatásban szereplő energiaképlet alapján megállapíthatjuk, hogy az azonos összenergiájú mesterséges holdak nagytengelyei egyenlő nagyságúak, tehát a rakéta pályájának fél nagytengelye megegyezik a Föld sugarával:

$$a = R \approx 6400\,\mathrm{km}.$$

b) A rakétapálya ellipszisének egyik fókusza a Föld középpontja. A pálya két pontja ismert: a Déli-sark és a becsapódási pont az Egyenlítőn. Mindkettő R távolságra van a Föld középpontjától. Ismert továbbá, hogy az ellipszis bármely pontjának távolságösszege a két fókusztól állandó: $2a = 2R$. Ennek alapján a rakétapálya ellipszisének másik fókuszát úgy találhatjuk meg, ha a pálya két ismert pontjából (a Déli-sarkból és az egyenlítői becsapódási pontból) R sugarú köríveket húzunk. Ezek metszéspontja jelöli ki a másik fókuszt.

A következő ábra szemlélteti a helyzetet. Megállapíthatjuk, hogy a két fókusz (F és F'), valamint a kilövési és a becsapódási pont (D és E) négyzetet alkot. A 45°-os szögfelezőre szimmetrikus helyzetből következik, hogy a kilövés és a becsapódás szöge is 45°-ot zár be a függőlegessel.



c) A fenti ábra alapján azt is láthatjuk, hogy az ellipszis kistengelyének hossza megegyezik a két fókusz közötti távolsággal, mindkettő $\sqrt{2}R$, vagy az ellipszis esetén szokásos jelöléseket használva: $b = c = R/\sqrt{2}$. Most már kiszámíthatjuk a maximális pályamagasságot:

$$h_{\max} = \mathrm{AH} - \mathrm{AB} = 2a - [R + (a - c)] = a + c - R = c = R/\sqrt{2} \approx 4500\,\mathrm{km}.$$

d) Kepler II. és III. törvényét használjuk fel a megoldásban. A III. törvény szerint az azonos nagytengelyű pályák keringési ideje megegyezik. Eszerint a rakéta teljes keringési ideje megegyezik az első kozmikus sebességgel körpályán keringő műhold keringési idejével:

$$mg = mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad \longrightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5074\,\mathrm{s} \approx 1{,}4\,\text{óra}.$$

A II. törvény alapján a kilövés és a becsapódás közötti repülési időt (t_{rep}) úgy számíthatjuk ki, ha a vezérsugár által súrolt területnek az ellipszis teljes területéhez képesti arányát megszorozzuk a fenti T keringési idővel. Az ellipszis területe: $\pi ab = \pi R^2/\sqrt{2}$. A súrolt területet egy fél ellipszisre és egy R befogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszögre bonthatjuk. Így a súrolt terület:

$$\pi \frac{R^2}{2\sqrt{2}} + \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 1 \right).$$

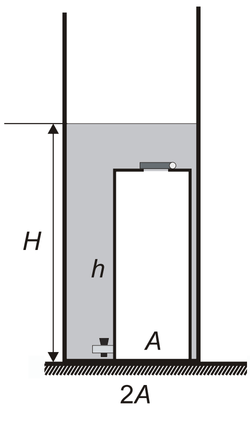
Tehát a repülési idő:

$$t_{\text{rep}} = \frac{\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + 1\right)}{\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}} T = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\right) T = \left(\pi + \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 3680\,\mathrm{s} \approx 1\,\text{óra}.$$

2. feladat

Egy $A = 1\,\mathrm{dm}^2$ keresztmetszetű, $h = 40\,\mathrm{cm}$ magasságú egyenes henger alakú tartály alján egy zárt csap, tetején pedig egy zárt szelep található. A szelep akkor nyit, amikor a tartályban lévő levegő nyomása $\Delta p = 20\,\mathrm{Hgcm}$-rel meghaladja a szelep feletti nyomást, majd ezt követően akkor zár, ha a külső és belső nyomások megegyeznek. (Az 1 Hgcm nyomás 1 cm magas higanyoszlop hidrosztatikai nyomásának felel meg.)

A tartályban $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ hőmérsékletű, $p_0 = 76\,\mathrm{Hgcm}$ nyomású levegő található, melynek nyomása és hőmérséklete megegyezik a külső légnyomással és hőmérséklettel. Ahogy az ábrán látható, a tartály egy szintén egyenes henger alakú, $2A$ keresztmetszetű edény aljára van rögzítve, amelyben $H = 50\,\mathrm{cm}$ magasságig higany található.



a) A csapot kissé kinyitjuk, így azon olyan lassan áramlik át a higany, hogy a hőmérséklet mindenhol állandó T_0 értéken marad. Hány liter higany jut be a tartályba addig a pillanatig, amikor a szelep kinyit?

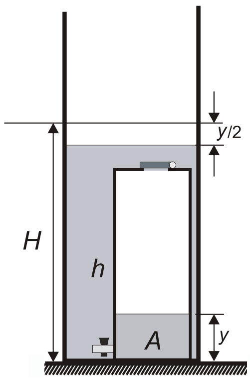
b) Egy másik alkalommal ugyanabból a kezdeti állapotból kiindulva teljesen kinyitjuk a csapot, így a higany olyan gyorsan áramlik át a csapon, hogy a tartályban lévő gáz állapotváltozása adiabatikusnak tekinthető. Ebben az esetben hány liter higany jut be a tartályba addig a pillanatig, amikor a szelep kinyit? (A higany hőmérsékletét, illetve sűrűségét állandónak tekinthetjük.)

c) Összesen hányszor nyit ki a szelep a fenti két esetben? Feltételezhetjük, hogy a higany átáramlása következtében a gáz állapotváltozása a későbbiek során is az *a)* esetben izotermikusan, a *b)* esetben adiabatikusan megy végbe. A szelep kinyitásakor a külső és a belső nyomás bizonyos mennyiségű levegőkiáramlással pillanatszerűen kiegyenlítődik, miközben a tartályban maradó levegő hőmérséklete nem változik. A szelep csak a tartályban lévő levegőből enged ki igen rövid idő alatt annyit, amennyi a túlnyomást megszünteti, de eközben higany nem jut át a szelepen.

Megoldás

a) A keresztmetszetek arányát tekintve megállapíthatjuk, hogy ha a nagy edényben 10 cm-rel csökkenne a higanyszint, akkor a tartályban 20 cm-rel emelkedne, és így a külső és a belső higanyszintek magasságkülönbsége éppen 20 Hgcm lenne. De ekkor a tartályban lévő gáz térfogata a felére csökkenne, ami kétszeres, azaz 152 Hgcm-es nyomást eredményezne. Tehát a szelep kinyitása ennél a feltételezett állapotnál hamarabb bekövetkezik.

Ezen felül azt is megállapíthatjuk, hogy amikor a nagy edényben már legalább 10 cm-es a higanyszint csökkenése (vagyis a szelep kikerül a normál légköri nyomású levegőre), akkortól a tartályban nem jöhet létre 20 Hgcm-es túlnyomás.



Legyen a szelep nyitásakor a higany magassága a tartályban y (centiméterben mérve – és ugyanígy járunk el a továbbiakban). Először írjuk fel a szelep nyitásának feltételét a hidrosztatikai nyomások segítségével:

$$p - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

ahol p a tartályban lévő levegő nyomása, a kapcsos zárójelben pedig a szelep feletti nyomás szerepel. Ez utóbbiban felhasználtuk, hogy a nagy edényben a higanyszint süllyedése fele a tartálybeli emelkedésnek.

Írjuk fel a Boyle–Mariotte-törvényt is:

$$76\,\mathrm{Hgcm}\cdot 40\,\mathrm{cm} = p\cdot(40\,\mathrm{cm} - y)\,.$$

Az egyenletrendszer fizikailag értelmes megoldása: $y = 9{,}91\,\mathrm{cm}$ és $p = 101\,\mathrm{Hgcm}$, tehát a szelep akkor nyit, amikor 0,99 liter higany jutott be a tartályba.

b) Lényegében ugyanazokat az egyenleteket kell megoldanunk, csak a Boyle–Mariotte-törvény helyett az adiabata-egyenletet kell felírnunk (1,4-es fajhőhányadossal):

$$p - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm}, \tag{1}$$

és

$$76\,\mathrm{Hgcm}\cdot(40\,\mathrm{cm})^{1{,}4} = p\cdot(40\,\mathrm{cm} - y)^{1{,}4}\,. \tag{2}$$

(1)-et (2)-be helyettesítve egyismeretlenes egyenletet kapunk y-ra:

$$0 = f_1(y) \equiv 76\,\mathrm{Hgcm}\cdot(40\,\mathrm{cm})^{1{,}4} - \left(106\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\cdot(40\,\mathrm{cm} - y)^{1{,}4}\,,$$

aminek a gyökét például számközfelező eljárással találhatjuk meg a $[0, 20]$ cm intervallumban, és a következő végeredményre jutunk: $y = 7{,}625\,\mathrm{cm}$ és így $p = 102{,}2\,\mathrm{Hgcm}$. Megállapíthatjuk, hogy adiabatikus összenyomás során 0,76 liter higany jut be a tartályba. Ez kevesebb, mint az izotermikus folyamatra kapott higanymennyiség.

c) Amikor a szelep kinyit, akkor levegő áramlik ki a tartályból, és a nyomás pillanatszerűen 20 Hgcm-rel (vagyis a túlnyomás értékével) csökken, majd a szelep lezár, de ezalatt nem változik a tartályban maradó levegő hőmérséklete és térfogata sem. Ez utóbbi azért nem, mert amíg a szelep nyitva (nagyon gyors folyamat) addig a nagy tehetetlenségű higany nem tud pillanatszerűen beáramlani a hengerbe, így a levegő kiáramlása ellenére a levegő hengerbeli térfogata nem változik.

Izotermikus esetben 3,01 liter, 300 K hőmérsékletű, $(101 - 20)\,\mathrm{Hgcm} = 81\,\mathrm{Hgcm}$ nyomású levegő (és kb. 10 cm magas higany) marad a tartályban, miközben a nagy edény alján a külső légnyomás és a higany hidrosztatikai nyomása együtt

$$p_1 = 76\,\mathrm{Hgcm} + 50\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y}{2}\,\mathrm{Hgcm} = 121\,\mathrm{Hgcm},$$

amiből még levonódik a tartályban lévő $y = 9{,}9\,\mathrm{cm}$ magasságú higany nyomása, de így is 111 Hgcm nyomás marad, azaz folytatódik a higany beáramlása. Nem tehetünk mást, mint újra az *a)* esethez hasonló egyenleteket írunk fel:

$$p_1 - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y_1}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

$$81\,\mathrm{Hgcm}\cdot(40\,\mathrm{cm} - 9{,}9\,\mathrm{cm}) = p_1\cdot(40\,\mathrm{cm} - y_1)\,.$$

A fizikailag értelmes megoldás $y_1 = 15{,}2\,\mathrm{cm}$ és $p_1 = 98{,}4\,\mathrm{Hgcm}$. Tehát most még $1{,}52\,\mathrm{liter} - 0{,}99\,\mathrm{liter} = 0{,}53\,\mathrm{liter}$ higany folyik át a csapon, és a levegőoszlop magassága 24,8 cm-re csökken. Ez arra sarkallhat minket, hogy még tovább kell folytatnunk a szukcesszív approximációt:

$$p_2 - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y_2}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

$$78,4\,\mathrm{Hgcm} \cdot (40\,\mathrm{cm} - 15{,}2\,\mathrm{cm}) = p_2 \cdot (40\,\mathrm{cm} - y_2)\,,$$

aminek eredménye $y_2 = 19{,}8\,\mathrm{cm}$ és $p_2 = 96{,}1\,\mathrm{Hgcm}$. A szelep kinyitása után a tartályban 76,1 Hgcm-es marad a nyomás, ami épp csak meghaladja a külső légnyomást, és az edényben lévő higany hidrosztatikai nyomástöbblete ekkor csak 20,3 Hgcm. Ez azt jelenti, hogy még további higany áramlik a tartályba, de a szelep már nem nyílik ki többet. Tehát izotermikus esetben a szelep háromszor nyílik ki.

Az adiabatikus esetet hasonló módon lehet végigszámolni. Először számoljuk ki a szelep második kinyitását:

$$p_1 - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y_1}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

és

$$82{,}2\,\mathrm{Hgcm} \cdot (40\,\mathrm{cm} - 7{,}6\,\mathrm{cm})^{1{,}4} = p_1 \cdot (40\,\mathrm{cm} - y_1)^{1{,}4}\,.$$

Ezt az egyenletrendszert ugyanúgy lehet megoldani, mint (1)-t és (2)-at Az egyenletrendszer megoldása: $y_1 = 11{,}85\,\mathrm{cm}$ és $p_1 = 100\,\mathrm{Hgcm}$. Folytassuk a szukcesszív approximációt:

$$p_2 - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y_2}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

és

$$80\,\mathrm{Hgcm} \cdot (40\,\mathrm{cm} - 11{,}85\,\mathrm{cm})^{1{,}4} = p_1 \cdot (40\,\mathrm{cm} - y_2)^{1{,}4}\,.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $y_2 = 15{,}66\,\mathrm{cm}$ és $p_2 = 98{,}2\,\mathrm{Hgcm}$. Látszik, hogy már alig van higany a szelep felett, de azért folytassuk tovább a szukcesszív approximációt:

$$p_3 - \left\{76\,\mathrm{Hgcm} + \left(10\,\mathrm{Hgcm} - \frac{y_3}{2}\,\mathrm{Hgcm}\right)\right\} = 20\,\mathrm{Hgcm},$$

és

$$78{,}2\,\mathrm{Hgcm} \cdot (40\,\mathrm{cm} - 15{,}66\,\mathrm{cm})^{1{,}4} = p_3 \cdot (40\,\mathrm{cm} - y_3)^{1{,}4}\,.$$

Eredményül $y_3 = 19{,}05\,\mathrm{cm}$-t és $p_3 = 96{,}5\,\mathrm{Hgcm}$-t kapunk. Az izotermikus esethez hasonlóan most is elmondhatjuk, hogy a szelep kinyitása után a tartályban 76,5 Hgcm-es marad a nyomás, ami alig haladja meg a külső légnyomást, és az edényben lévő higany hidrosztatikai nyomástöbblete ekkor csak 21,4 Hgcm. Ez azt jelenti, hogy még további higany áramlik a tartályba, de a szelep már nem nyílik ki többet. Tehát adiabatikus esetben a szelep összesen négyszer nyílik ki.

3. feladat

Hosszú, vékony vezetékben f frekvenciájú, I_0 amplitúdójú szinuszos $I(t)$ váltakozó áram folyik. A vezetékre merőleges síkban az *a) ábrán* látható módon egy sokmenetes, n egyenletes menetsűrűségű, R középkör sugarú, $A \ll R^2\pi$ keresztmetszetű, légmagos toroidtekercset helyezünk el. A tekercs középkörének középpontja egybeesik az egyenes vezetékkel.

a) Mekkora a tekercs kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke?

Ezután a tekercset a *b) ábrának* megfelelő módon elmozdítjuk, úgy, hogy a középpontja d távolságra legyen a vezetéktől.

b) Mekkora most a tekercs kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke?

Ezt követően a tekercset megdöntjük úgy, hogy a síkja α szöget zárjon be a függőlegessel a *c) ábrának* megfelelő módon.

c) Mekkora most a tekercs kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke?

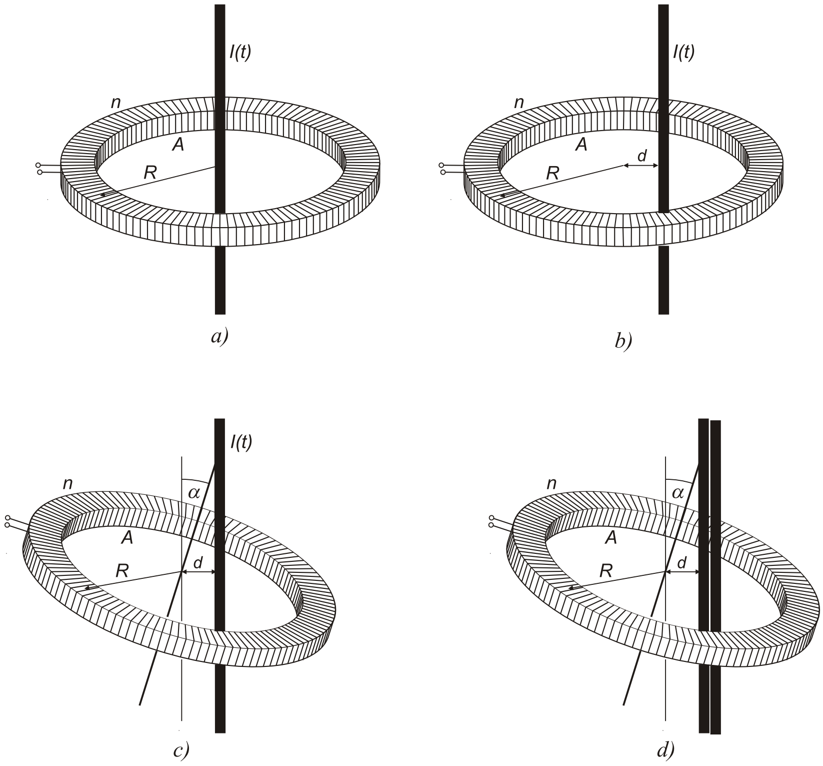
Végül a hosszú vezetéket a távolban megfordítva visszavezetjük saját maga mellé a *d) ábrán* látható módon.

d) Mekkora most a tekercs kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke?

Útmutatás: A megoldás során felhasználhatjuk az Ampére-féle gerjesztési törvényt, amely szerint egy zárt görbe mentén a $\boldsymbol{B}$ mágneses indukcióvektor és a $\Delta\boldsymbol{s}$ ívelemvektor skaláris szorzatainak összege (ún. örvényerősség) a görbe által közrezárt áramerősség algebrai összegével arányos:

$$\overset{\bigcirc}{\sum} \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{s} = \mu_0 I,$$

ahol a szummajel fölötti karika a zárt görbére utal. (Feltehetjük, hogy az f frekvencia nem túl nagy, így az egyenáramra érvényes Ampére-féle gerjesztési törvényt nem kell kiegészíteni egy új taggal a jobb oldalon.)



Megoldás

a) Alkalmazzuk az útmutatóban megadott törvényt:

$$\oint \sum \boldsymbol{B} \cdot \Delta \boldsymbol{s} = \mu_0 I. \tag{3}$$

Ha a vezeték a toroid középpontjában van, az összegzés könnyen elvégezhető, mert R távolságban a mágneses indukció mindenhol ugyanakkora, így

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R\pi}. \tag{4}$$

A toroid kivezetései közötti indukált feszültség nagyságát a Faraday-törvényből számíthatjuk ki:

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta (BNA)}{\Delta t},$$

mivel az indukcióvektor a toroid minden A felületű menetét merőlegesen döfi át, így a mágneses fluxus $\Phi = BNA$, ahol N a tekercs menetszáma. Innen adódik, hogy

$$U_\mathrm{i} = -NA\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Felhasználva a mágneses indukcióra kapott (4) eredményt, és hogy a menetsűrűség $n = N/(2R\pi)$:

$$U_\mathrm{i}(t) = -\mu_0 n A \frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{5}$$

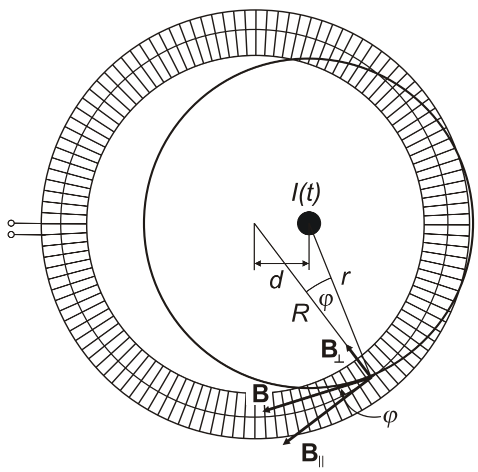
A vezetékben $I(t) = I_0 \sin(2\pi f t)$ váltakozó áram folyik. Harmonikus rezgőmozgás esetén, ha a kitérés $x = A\sin(2\pi f t)$ alakú, akkor a sebesség (a kitérés változási üteme) $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = A \cdot 2\pi f \cos(2\pi f t)$. A kitérést az I áramerősségnek megfeleltetve:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = 2\pi f I_0 \cos(2\pi f t).$$

Az indukált feszültség maximuma $\mu_0 n A \cdot 2\pi f I_0$, a változás koszinuszos, azaz az effektív értéke a maximum $\sqrt{2}$-ed része:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{2}\pi\mu_0 n A f I_0. \tag{6}$$

b) Ha kimozdítjuk a vezetéket a kör középpontjából, akkor a teljes fluxus meghatározása már nem könnyű, hiszen (3)-ban a mágneses indukció már nem emelhető ki, és a Faraday-törvényben sem egyszerű a fluxus meghatározása. Szerencsére nem kell ezeket meghatározni, látni fogjuk, hogy a (3) kifejezésben lévő összeg szerepel a fluxusban is.



e)

Tekintsük az *e)* ábrát! A vezeték körüli, r sugarú körvonal mentén a mágneses indukció értéke $B(r)$. Bontsuk fel az ábrán látható pontban a $\boldsymbol{B}$ mágneses indukcióvektort $\boldsymbol{B}_\parallel$ és $\boldsymbol{B}_\perp$ komponensekre. A párhuzamos komponens nagysága $B_\parallel = B(r)\cos\varphi$. Minden egyes menetnél ez a komponens ad járulékot a fluxus kiszámításánál:

$$U_{\text{i}} = -\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\sum_j B_{\parallel,j} A_j\right) = -A\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\sum_j B_j \cos\varphi_j\right),$$

ahol j az egyes menetek járulékát indexeli. $A_j = A$, mert a keresztmetszet a toroidban végig állandó. Szintén állandó a

$$\Delta s_j = \Delta s = \frac{2R\pi}{N} = \frac{1}{n}$$

menettávolság. Ezzel bővítve

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{A}{\Delta s}\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\sum_j B_j \Delta s_j \cos\varphi_j\right).$$

Mivel $B_j \Delta s_j \cos\varphi_j = \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{s}$ a j-edik szakaszon, és a j-kre összegezve a teljes toroid középvonalán körbemegyünk, ezért a (3) gerjesztési törvényt használva

$$U_{\mathrm{i}}(t) = -An\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\oint \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{s}\right) = -\mu_0 nA\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

ami azonos az *a)* részbeli (5) eredménnyel, vagyis a tekercs kivezetései között mérhető effektív feszültség most is

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}\pi\mu_0 nAfI_0.$$

c) Próbáljuk meg a *b)* rész gondolatmenetét tovább általánosítani erre az esetre. A j-edik menetben mérhető Φ_j fluxus attól függ, hogy mekkora az itt mérhető $\boldsymbol{B}_j$ mágneses indukcióvektor felületre merőleges komponense. Ha bevezetjük a j-edik tekercsfelületre merőleges $\boldsymbol{e}_j$ egységvektort, akkor a Φ_j fluxus felírható a $\Phi_j = A_j\boldsymbol{B}_j \cdot \boldsymbol{e}_j$ alakban is, ahol a skalárszorzat elvégzése veszi figyelembe az indukcióvektor merőleges komponensét. $A_j = A$ továbbra is a helytől független keresztmetszete a toroidnak. Ha észrevesszük, hogy az egymás utáni menetek középpontját összekötő $\Delta\boldsymbol{s}_j$ vektor és $\boldsymbol{e}_j$ nagy menetszám esetén közel párhuzamosak, és közöttük fennáll, hogy

$$\boldsymbol{e}_j = \frac{\Delta\boldsymbol{s}_j}{|\Delta\boldsymbol{s}_j|} = \frac{\Delta\boldsymbol{s}_j}{|\Delta\boldsymbol{s}|} = \frac{\Delta\boldsymbol{s}_j}{\Delta s} = n\Delta\boldsymbol{s}_j.$$

Így az indukált feszültség a következő módon is írható:

$$U_{\mathrm{i}} = -\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\sum_j A_j\boldsymbol{B}_j \cdot \boldsymbol{e}_j\right) = -An\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\sum_j \boldsymbol{B}_j \cdot \Delta\boldsymbol{s}_j\right) = -nA\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\oint \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{s}\right).$$

Ami a gerjesztési törvényt is figyelembevéve a *b)* részhez hasonlóan az

$$U_{\mathrm{i}}(t) = -\mu_0 nA\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

pillanatnyi értéket eredményezi. Ez megegyezik az *a)* és *b)* részben kapott eredménnyel, így ebben az esetben is ugyanaz az effektív érték:

$$U_{\mathrm{eff}} = \sqrt{2}\pi\mu_0 nAfI_0.$$

Természetesen az *a)* és *b)* részek eredményei a *c)* esetből mint speciális esetből is megkaphatók.

d) Láttuk, hogy az indukált feszültség arányos a $\mu_0 I$ örvényerősséggel (annak változási sebességével), ezért ilyen visszavezetett vezetékpár esetén a teljes áram nulla, azaz az indukált feszültség is nulla lesz ebben az esetben.

Megjegyzések:

1. A megoldás során kihasználtuk, hogy a tekercs egy menetének felülete kicsi, azon belül az indukció állandónak vehető.

2. A feladatban leírt elrendezést *Rogowski-tekercs*nek nevezik, amivel egy vezetékben folyó váltóáram effektív értékét lehet mérni anélkül, hogy árammérőt iktatnánk a vezeték körébe. Fontos, a gyakorlatban igen hasznos tulajdonsága, hogy a Rogowski-tekercs által mért feszültség érzéketlen arra, hogy a vezető a tekercs síkját hol és milyen szögben döfi át.

3. Fontos, hogy a tekercs menetsűrűsége állandó legyen. Ha nem ez a helyzet, akkor a számolás bonyolult, és a mért feszültségérték függ a tekercs helyzetétől. A valódi, ezen az elven alapuló mérőműszereket is úgy készítik, hogy a menetsűrűség minél inkább állandó legyen.

4. Ha a tekercs vasmagos, akkor is nehéz kiszámolni az indukált feszültséget, mert a relatív permeabilitás nem állandó, függ a mágneses tértől (másrészről a vas mágnesezettsége telítődik bizonyos mágneses tér felett, ezért nagyobb áramok mérésére nem lenne alkalmas).

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	A rakéta pályájának fél nagytengelye:	2 pont
b)	A rakéta indítási szöge:	3 pont
	A rakéta becsapódási szöge:	3 pont
c)	A rakéta pályamagassága:	4 pont
d)	A rakéta teljes keringési ideje:	2 pont
	A rakéta repülési ideje:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A beáramló higany térfogatának kiszámítása:	4 pont
b)	A beáramló higany térfogatának kiszámítása:	6 pont
c)	Szelepnyitások számának meghatározása izotermikus esetben:	4 pont
	Szelepnyitások számának meghatározása adiabatikus esetben:	6 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A toroidon belüli mágneses indukció meghatározása:	2 pont
	Az indukált feszültség kifejezése az áram változási ütemével:	3 pont
	Az áram változási ütemének megadása:	3 pont
	A toroid kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke:	2 pont
b)	Annak felismerése, hogy az indukált feszültség ugyanaz, mint az *a)* részben:	2 pont
	A toroid kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke:	2 pont
c)	Annak felismerése, hogy az indukált feszültség ugyanaz, mint az *a)* részben:	2 pont
	A toroid kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke:	2 pont
d)	A toroid kivezetései között mérhető feszültség effektív értéke:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.