Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
1. forduló

FIZIKA

II. kategória

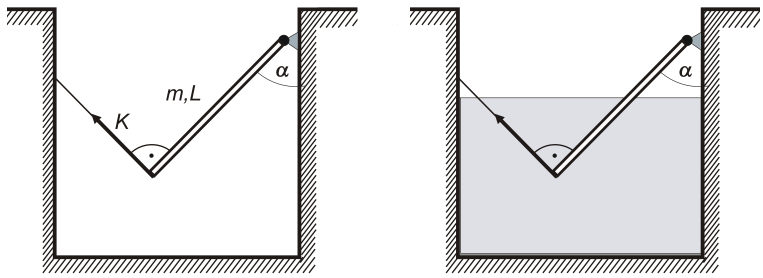
<u>Javítási-értékelési útmutató</u>

1. feladat. Az m tömegű, L hosszúságú, egyenletes keresztmetszetű, vékony rúd egyik végénél (az ábrán látható módon) csuklóval csatlakozik egy tartály függőleges oldalához. A rudat a másik végénél a rá merőleges (elhanyagolható keresztmetszetű és tömegű) fonál a tartály falához képest α szögben tartja.

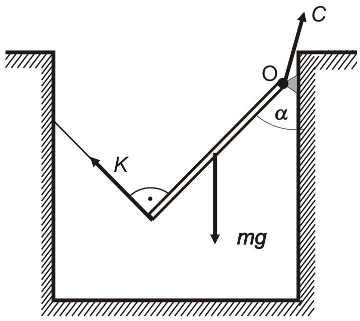
a) Mekkora a fonálban ható K erő?

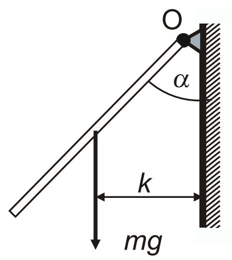
b) A tartályba annyi folyadékot öntünk, hogy a rúd hosszának 60 %-a benne legyen. A rúd és a fonál helyzete nem változik, a fonálerő viszont 20 %-kal csökken. Hányszorosa a rúd anyagának sűrűsége a folyadék sűrűségének?

c) Hogyan változik a csuklót terhelő erő iránya (meredekebb, laposabb, nem változik) az üres kádban fellépőhöz képest?



Megoldás. *a)* Kezdetben a rúdra három erő hat: a K fonálerő, az mg nehézségi erő és a C csuklóerő. Egyensúly lévén ezek vektori összege nulla, és bármely tengelyre vonatkozó forgatónyomatékaik összege is nulla. Legyen a tengely az O csuklón átmenő, az ábra síkjára merőleges egyenes.





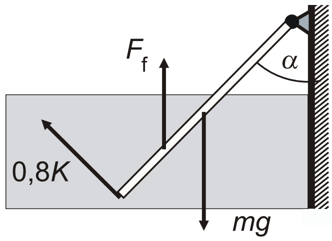
A csuklóerő karja nulla, a fonálerőé L, a nehézségi erőé

$$k = \frac{L}{2}\sin\alpha. \tag{1}$$

Ezekkel $KL = mg\frac{L}{2}\sin\alpha$, vagyis

$$K = \frac{1}{2}mg\sin\alpha. \tag{2}$$

b) A folyadékos esetben a változatlan nehézségi erő, a megváltozott fonálerő $(0{,}8K)$ és a csuklóerő mellett fellép még a rúdra ható F_f felhajtóerő, melynek hatásvonala a bemerülő rész felénél metszi a rudat. A bemerülő rész fele $0{,}3L$, a kilógó $0{,}4L$, így a metszéspont a forgástengelytől $0{,}7L$-re van.



A felhajtóerő karja (1) mintájára $0{,}7L\sin\alpha$. Ezzel a forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet:

$$0{,}8KL + 0{,}7F_\mathrm{f}L\sin\alpha = 0{,}5mgL\sin\alpha.$$

L-lel egyszerűsítve, és K (2)-beli alakját behelyettesítve

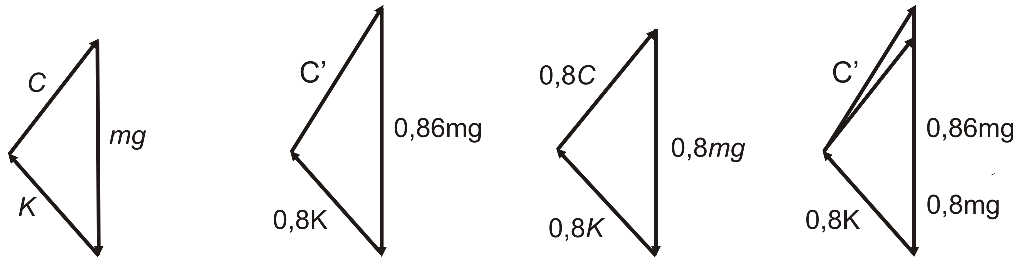
$$0{,}4mg\sin\alpha + 0{,}7F_\mathrm{f}\sin\alpha = 0{,}5mg\sin\alpha.$$

Összevonás és $0{,}1\sin\alpha$-val való egyszerűsítés után $7F_\mathrm{f} = mg$. Legyen a folyadék sűrűsége ϱ_f, a rúdé ϱ_r, a rúd keresztmetszete A. Ezekkel kifejezve a felhajtóerőt és a nehézségi erőt, az előbbi egyenlet

$$7\varrho_\mathrm{f}\cdot 0{,}6LAg = \varrho_\mathrm{r}LAg.$$

Egyszerűsítés után $\varrho_\mathrm{r} = 4{,}2\varrho_\mathrm{f}$. Tehát a rúd anyagának sűrűsége 4,2-szerese a folyadék sűrűségének.

c) A két esetre készítsük el az erők vektori ábráját Mivel a felhajtóerő hetede a nehézségi erőnek, így folyadékba merülve a függőleges vektor hossza $6/7\,mg \approx 0{,}86\,mg$. A fonál és a függőleges által bezárt szög a két esetben azonos, vagyis K és mg közbezárt szöge azonos $0,8K$ és mg közbezárt szögével.



Kicsinyítsük az első ábrát 0,8-szeresre (harmadik ábra, a kicsinyítés szögtartó), majd a jobb átláthatóság érdekében tegyük egymásra a második és harmadik ábrát (negyedik ábra). Az eredeti C erő párhuzamos $0{,}8C$-vel, C' pedig meredekebb állású $0{,}8C$-nél. Newton III. törvénye alapján az új csuklót terhelő erő C'-vel egyenlő nagyságú, és ellentétes irányú, tehát az is meredekebb állású lesz C-nél. Tehát a második esetben a csuklóerő állása meredekebb az első esetbelinél.

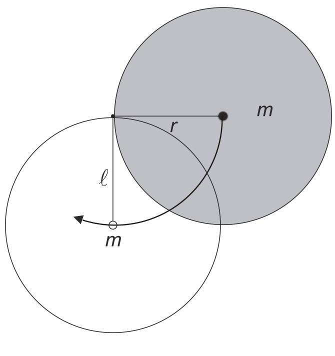
2. feladat. Egy m tömegű, ℓ hosszúságú, pontszerűnek tekinthető ingatest fonalának végét és egy ugyancsak m tömegű, egyenletes anyageloszlású, $r = \ell$ sugarú vékony korongot pereménél fogva közös vízszintes tengelyhez erősítettünk, majd a vízszintesig kitérítettük az ábra szerint. Ezután mindkettőt kezdősebesség nélkül elengedtük.

a) Mekkora sebességkülönbséggel érkezik a fonálinga és a korong közepe a legalsó helyzetbe?

b) Mekkora gyorsuláskülönbséggel indul a kis test és a korong közepe, és mekkorával érkeznek a legalsó helyzetbe?

c) Mekkora az általuk a forgástengelyre kifejtett erők különbsége induláskor, és amikor a legalsó helyzetbe kerültek?

(A fonál tömege elhanyagolható, $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, $\ell = r = 0{,}5\,\mathrm{m}$, számoljunk $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$–tel!)



Megoldás. *a)* Vegyük észre, hogy a fonálinga pontszerű ingateste és a korong tömegközéppontja azonos távolságra van a forgástengelytől. Kezdeti helyzeti energiájuk azonos, ami a legalsó helyzetbe kerüléskor teljes egészében forgási energiává alakul. Ilyenkor a tehetetlenségi nyomatékot a forgástengelyre kell venni, ami a két esetben más. Ez okozza a sebességkülönbséget. A fonálinga sebessége a legmélyebb helyzetében

$$v_\mathrm{i} = \sqrt{2gl},$$

a korong tömegközéppontjának sebessége az energiamegmaradásából számolható:

$$mgr = \frac{1}{2}\Theta_\mathrm{A}\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}mv_\mathrm{k}^2,$$

ahonnan a korong középpontjának sebessége:

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{4}{3}gl}.$$

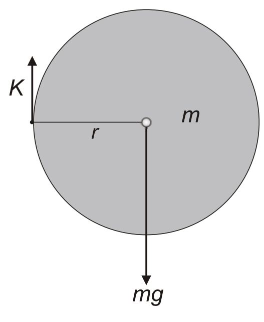
Az megelőző összefüggésben Θ_A a korongnak a forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka (Steiner-tétel):

$$\Theta_\mathrm{A} = \Theta_\mathrm{TK} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

A sebességkülönbség:

$$v_\mathrm{i} - v_\mathrm{k} = \sqrt{2gl} - \sqrt{\frac{4}{3}gl} = \left(\sqrt{6}-2\right)\sqrt{\frac{gl}{3}} = 0{,}58\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) és *c)* A fonálinga kezdőgyorsulása $a_{\mathrm{i}0} = g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, mert a fonál ekkor nem fejt ki rá erőt. A korongra a felfüggesztési pont erőt fejt ki (K), ez az erő felfelé hat, ami csökkenti a nehézségi erő okozta gyorsulást.



Meghatározzuk a korong középpontjának kezdő szöggyorsulását. Írjuk fel a forgatónyomaték-egyenletet a felfüggesztési pontra. Ebben a K erő forgatónyomatéka 0, csak az ismert nehézségi erő fejt ki forgatónyomatékot.

$$mgr = \Theta_\mathrm{A}\beta = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\beta = \frac{3}{2}mr^2\beta,$$

ahol ismét felhasználtuk Steiner tételét. Innen a keresett szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{2g}{3r}.$$

A korong közepének kezdőgyorsulása tehát:

$$a_{\mathrm{k0}} = r\beta = \frac{2}{3}g = 6{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A K erőt megkapjuk Newton II. törvényéből

$$ma_{\mathrm{k0}} = mg - K,$$

ahonnan

$$K = mg - ma_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{3}mg.$$

Ez egyben a kezdeti erőkülönbség is, amelynek nagysága:

$$\Delta K_0 = \frac{1}{3}mg = \frac{5}{3}\,\mathrm{N} \approx 1{,}67\,\mathrm{N}.$$

A keresett gyorsuláskülönbség:

$$\Delta a = a_{\mathrm{i0}} - a_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{3}g \approx 3{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ezek az értékek, ill. a keresett különbségek a legalsó helyzetben a mozgástörvényekből nyerhetők. Itt csak függőleges erők szerepelnek. A fonálingára az erő és a gyorsulás számítása:

$$K_{\mathrm{i1}} - mg = ma_{\mathrm{i1}} = m\frac{v_{\mathrm{i}}^2}{l} = m\frac{2gl}{l} = 2mg,$$

ahonnan az inga által kifejtett erő:

$$K_{\mathrm{i1}} = 3mg.$$

Ugyanez a korongra (itt a pillanatnyi szöggyorsulás nulla):

$$K_{\mathrm{k1}} - mg = ma_{\mathrm{k1}} = m\frac{v_{\mathrm{k}}^2}{r} = m\frac{\frac{4}{3}gr}{r} = \frac{4}{3}mg,$$

ahonnan a korong által kifejtett erő:

$$K_{\mathrm{k1}} = \frac{7}{3}mg.$$

A keresett erőkülönbség tehát:

$$\Delta K_1 = K_{\mathrm{i1}} - K_{\mathrm{k1}} = 3mg - \frac{7}{3}mg = \frac{2}{3}mg = 3{,}33\,\mathrm{N}.$$

Végül a gyorsulások a legalsó pontban:

$$a_{\mathrm{i}1} = \frac{v_{\mathrm{i}}^2}{l} = \frac{2gl}{l} = 2g,$$

ill.

$$a_{\mathrm{k}1} = \frac{v_{\mathrm{k}}^2}{r} = \frac{\frac{4}{3}gr}{r} = \frac{4}{3}g.$$

Ezzel a korong közepének és a fonálinga pontszerű ingatestének gyorsuláskülönbsége a legalsó pontban:

$$\Delta a_1 = a_{\mathrm{i}1} - a_{\mathrm{k}1} = 2g - \frac{4}{3}g = \frac{2}{3}g \approx 6{,}67\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

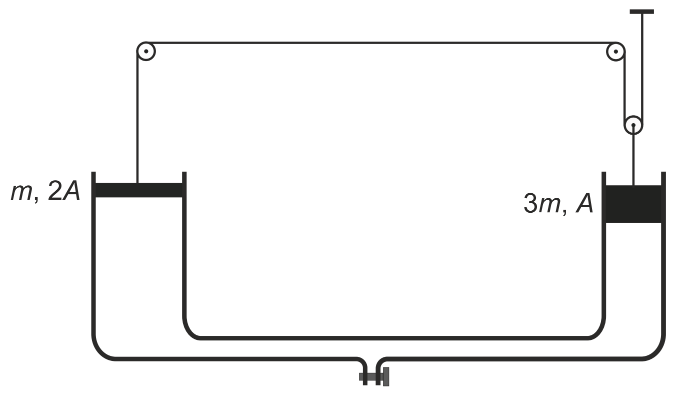
Megjegyzés: Az nem véletlen, hogy a gyorsuláskülönbséget m-mel megszorozva megkapjuk az erőkülönbséget. Mindez Newton II. törvényéből és abból következik, hogy a nehézségi erő mindkét testre ugyanakkora.

3. feladat. Az ábrán látható elrendezésben mindkét, m és a $3m$ tömegű dugattyú súrlódásmentesen mozoghat a $2A$, illetve A keresztmetszetű hengerben. A fonalak és a csigák tömegétől eltekinthetünk.

a) Mekkora erő hat a két kötélben, amikor a dugattyúk egyensúlyban vannak?

b) Mekkora gyorsulással indulnak a dugattyúk miután az egyik kötelet elvágtuk?

c) Mekkora gyorsulással indulnak a dugattyúk, ha a hengereket összekötő csövön lévő csapot hirtelen megnyitjuk? (Ebben az esetben a köteleket nem vágjuk el.)



Megoldás. Az állócsigákon átvetett fonálban K erő hat. A mozgócsiga dinamikai vizsgálatának következménye, hogy a mozgócsiga tengelyéből induló fonálban $2K$ erő hat.

a) Mindkét dugattyú áll, ezért a rájuk ható erők eredője nulla:

$$mg + p_0 \cdot 2A = p_1 \cdot 2A + K,$$

$$3mg + p_0 \cdot A = p_1 \cdot A + 2K,$$

ahol p_0-lal a külső légnyomást jelöltük. A fenti két egyenletből $2K$-t kifejezve, majd egyenlővé téve adódik:

$$2mg + 4p_0 \cdot A - 4p_1 \cdot A = 3mg + p_0 \cdot A - p_1 \cdot A,$$

$$3p_0 \cdot A = mg + 3p_1 \cdot A,$$

$$p_1 = p_0 - \frac{mg}{3A}.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve:

$$K = mg + p_0 \cdot 2A - p_1 \cdot 2A = mg + 2p_0 \cdot A - 2p_0 \cdot A + \frac{2}{3}mg = \frac{5}{3}mg.$$

Ennek alapján az állócsigákon átvetett fonálban $K = \frac{5}{3}mg$, a mozgócsiga tengelyéből induló fonálban $2K = \frac{10}{3}mg$ erő hat.
b) Alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét az egyik, illetve másik dugattyúra:

$$a_1 = \frac{(p_0 - p_1) \cdot 2A + mg}{m} = \frac{\left(\frac{mg}{3A}\right) \cdot 2A + mg}{m} = \frac{5}{3}g,$$

$$a_2 = \frac{(p_0 - p_1) \cdot A + 3mg}{3m} = \frac{\left(\frac{mg}{3A}\right) \cdot A + 3mg}{3m} = \frac{10}{9}g.$$

c) A csap kinyitása után a külső és belső nyomáskülönbség eltűnik. Alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét az egyik, illetve másik dugattyúra:

$$K - mg = ma_1,$$

$$3mg - 2K = 3ma_2.$$

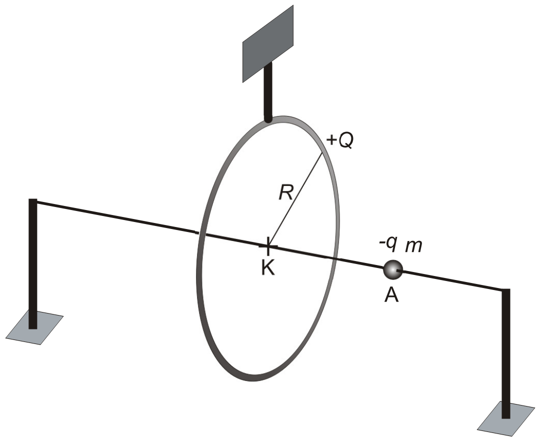
Fogalmazzuk meg a két test gyorsulásai között fennálló kényszerfeltételt:

$$a_1 = 2a_2.$$

A fenti három egyenletből álló egyenletrendszert megoldva:

$$a_1 = \frac{2}{7}g \text{ (felfelé)}, \quad a_2 = \frac{1}{7}g \text{ (lefelé)}.$$

4. feladat. Egy függőleges síkú, rögzített, R sugarú szigetelő karikán egyenletes töltéseloszlással $(+Q)$ töltés helyezkedik el. A karika középpontjában a síkjára merőlegesen (vízszintesen) elhelyezünk egy merev, rögzített, szigetelő pálcát. A pálcán egy m tömegű, $(-q)$ töltésű gyöngyszem mozoghat súrlódásmentesen.



a) Mekkora sebességgel ér a karika K középpontjától $d = R$ távolságra (vagyis az A pontban) magára hagyott gyöngyszem a karika középpontjába?

b) A karika középpontjában egyensúlyi helyzetben levő gyöngyszemet $x \ll R$ távolsággal kitérítjük. Határozzuk meg a gyöngy mozgásának periódusidejét!

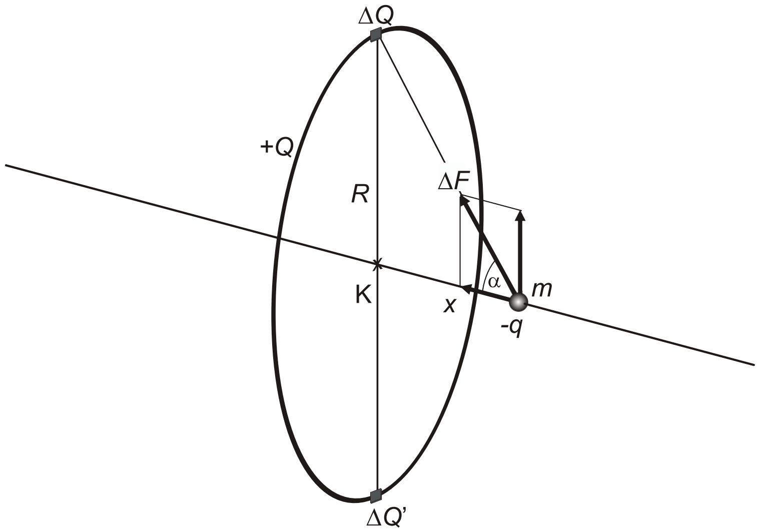
c) Fűzzünk a szigetelő pálcára a gyöngy helyett egy $L = 2R$ hosszúságú, $(-q)$ töltésű, m tömegű szívószálat úgy, hogy a szívószál közepe essen egybe a karika középpontjával. (A szívószál töltéseloszlása egyenletes, sugara r, ahol $r \ll R$.) A szívószálat egyensúlyi helyzetéből $x \ll R$ távolsággal térítsük ki. Hányszorosa a szívószál rezgésideje a gyöngy rezgésidejének, ha feltesszük, hogy a súrlódás most is elhanyagolható?

Megoldás. *a)* A konzervatív elektrosztatikus mezőben a gyöngyszem potenciális és mozgási energiájának összege állandó:

$$
\begin{aligned}
E_p^A + E_m^A &= E_p^K + E_m^K, \\
-\frac{kqQ}{\sqrt{2}R} &= -\frac{kqQ}{R} + \frac{1}{2}mv^2, \\
kqQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{2}R}\right) &= \frac{1}{2}mv^2, \\
\sqrt{2}kqQ\frac{\sqrt{2}-1}{mR} &= v^2\,,
\end{aligned}
$$

amelyből

$$v = \sqrt{\frac{kqQ}{mR}\left(2 - \sqrt{2}\right)}\,.$$



b) A karikán lévő ΔQ töltés

$$\Delta F = \frac{kq\Delta Q}{R^2 + x^2}$$

nagyságú erőt fejt ki a gyöngyre.

Ennek az erőnek a szálra merőleges komponenseit kompenzálja a K-ra középpontosan szimmetrikusan elhelyezkedő $\Delta Q'$ töltés által kifejtett erő, így a gyöngyre ható eredő erő szálirányú. A vonzóerő irányát is figyelembe véve a gyöngyszemre ható erő

$$F(x) = -\sum \Delta F \cdot \cos\alpha = -\sum \frac{kq\Delta Q}{R^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = -\frac{kqQ}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x.$$

Ha $x \ll R$ akkor

$$F(x) \approx -\frac{kqQ}{R^3} \cdot x \equiv -m\omega_1^2 x,$$

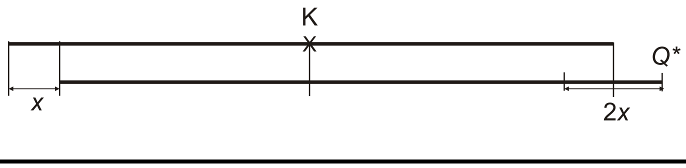
így a mozgás harmonikus rezgőmozgással közelíthető. Itt felhasználtuk, hogy ilyenkor a harmonikus visszatérítő erő felírható $-m\omega_1^2 x$ alakban is, ha a rezgő test tömege m, ω_1 pedig a harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciája. Így a kis amplitúdójú rezgés periódusideje:

$$T_\mathrm{b} = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3 m}{kqQ}} = 2\pi R\sqrt{\frac{mR}{kqQ}}.$$

c) Ha egyensúlyi helyzetéből x távolsággal térítjük ki a szívószálat, akkor a végén $2x$ hosszúságú részen elhelyezkedő

$$Q^* = \frac{2x}{L} q$$

töltésre ható erő nem kompenzálódik.



Figyelembe véve, hogy $x \ll R$, és $L = 2R$,

$$F = \frac{kQQ^*}{(\sqrt{2}R)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

A vonzóerő irányát is figyelembe véve, és behelyettesítve Q^*-ot, kapjuk:

$$F(x) = -\frac{kQq\sqrt{2}}{4R^3} \cdot x \equiv -m\omega_2^2 x.$$

A szívószál rezgésideje kis kitérésre:

$$T_\mathrm{c} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{4mR^3}{kqQ\sqrt{2}}} = 4\pi R\sqrt{\frac{mR}{kqQ\sqrt{2}}}.$$

A szívószál és a gyöngyszem rezgésidejének aránya:

$$\frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{b}} = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{3}{4}} \approx 1{,}68.$$

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	A fonálerő kiszámítása:	5 pont
b)	A forgatónyomaték-egyenlet helyes felírása a három erővel:	4 pont
	A felhajtóerő és a nehézségi erő viszonyának megállapítása:	3 pont
	A helyes sűrűségarányok kiszámítása:	2 pont
c)	A csukló által kifejtett erő irányváltozásának megállapítása:	5 pont
	A terhelőerőnél hivatkozás Newton III. törvényére:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A leérkezéskori sebességkülönbség meghatározása:	4 pont
b), c)	A korongközéppont kezdő szöggyorsulásának meghatározása:	3 pont
	A kezdeti erőkülönbség meghatározása:	3 pont
	A kezdeti gyorsuláskülönbség meghatározása:	3 pont
	A legalsó pontbeli erőkülönbség meghatározása:	4 pont
	A legalsó pontbeli gyorsuláskülönbség a meghatározása:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

	A két fonálban ható erő arányának felírása:	1 pont
a)	Dinamika alapegyenletének helyes felírása a két nyugalomban lévő dugattyúra:	2+2 pont
	A fonalakban ható két erő megadása:	2+1 pont
b)	Dinamika alapegyenletének helyes felírása a két dugattyúra:	2 pont
	A két test gyorsulásának helyes megadása:	2+1 pont
c)	Dinamika alapegyenletének helyes felírása a két dugattyúra:	2 pont
	A két test gyorsulásai között fennálló kényszerfeltétel felírása:	2 pont
	A két test gyorsulásának helyes megadása:	2+1 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	Az energiamegmaradás egyenletének felírása:	2 pont
	A potenciális energiák helyes megadása:	2 pont
	A sebesség értékének helyes megadása:	2 pont
b)	A gyöngyszemre ható $F(x)$ erő megadása:	2 pont
	$F(x)$ megadása kis kitérésekre:	2 pont
	A periódusidő helyes megadása:	2 pont
c)	$F(x)$ megadása:	4 pont
	A szívószál rezgésidejének helyes megadása:	2 pont
	A rezgésidők arányának helyes megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.