Oktatási Hivatal

A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2. forduló

FIZIKA

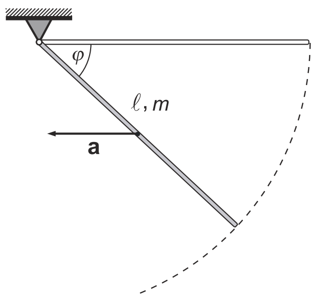
I. kategória

Javítási-értékelési útmutató

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Egy vékony, homogén anyageloszlású, ℓ hosszúságú, m tömegű rudat egyik végén csukló segítségével függesszünk fel. A rudat az ábrán látható módon térítsük ki vízszintes helyzetig, majd lökésmentesen engedjük el.



a) Mekkora φ szöget zár be a rúd a vízszintessel, amikor tömegközéppontjának eredő gyorsulása éppen vízszintes? Mekkora ez a gyorsulás? Mekkora erővel hat a súrlódásmentes csukló a rúd végére ebben a helyzetben? Mekkora α szöget zár be a vízszintessel a csuklóerő ebben a pillanatban?

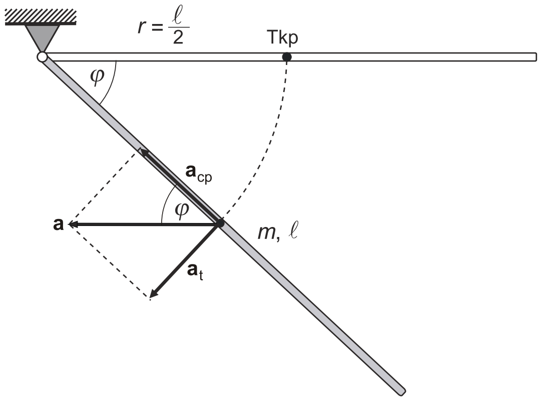
Általánosítsuk a problémát a következő módon: Tetszőleges anyageloszlású, vékony, lapos merev test forogjon rögzített, vízszintes tengely körül, amely merőleges a lapos test síkjára. A test tömege legyen m, tehetetlenségi nyomatéka az adott forgástengelyre nézve Θ, továbbá a forgástengely és a tömegközéppont távolsága legyen s. A kezdőpillanatban térítsük ki a testet úgy, hogy az s szakasz vízszintes legyen, majd engedjük el a testet, amely így függőleges síkú forgómozgásba kezd.

b) Mekkora φ szöget zár be az s szakasz a vízszintessel, amikor a test tömegközéppontjának eredő gyorsulása éppen vízszintes? Mekkora ez a gyorsulás? Mekkora erővel hat a súrlódásmentes tengely a testre ebben a helyzetben? Mekkora α szöget zár be a vízszintessel a tengely által kifejtett erő ebben a pillanatban?

c) Milyen tömegeloszlású legyen a test, hogy az α szög megegyezzen a φ szöggel, amikor a test tömegközéppontjának gyorsulása vízszintes? Keressünk olyan rendszert, amelyre megvalósul ez a feltétel!

Megoldás

a) A rúd tömegközéppontjának eredő gyorsulása a centripetális gyorsulás és az érintőleges gyorsulás vektori összege.



A sugárirányú centripetális gyorsulást ($a_{\mathrm{cp}} = \omega^2 r$) az energiamegmaradás segítségével határozhatjuk meg:

$$mg\frac{\ell}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}\Theta_{\text{rúd}}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\omega^2,$$

ahol kihasználtuk, hogy a rúd végpontjára nézve a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_{\text{rúd}} = \frac{1}{3}m\ell^2$. Egyszerűsítések után $\ell\omega^2 = 3g\sin\varphi$ eredményre jutunk, majd kihasználva, hogy $r = \ell/2$, megkapjuk a tömegközéppont centripetális gyorsulását:

$$a_{\mathrm{cp}} = \omega^2 r = \frac{3}{2}g\sin\varphi.$$

Az érintőleges (tangenciális) gyorsulást ($a_{\mathrm{t}} = r\beta = \frac{\ell}{2}\beta$) a nehézségi erő csuklóra vett forgatónyomatékából számíthatjuk ki:

$$mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi = \Theta_{\text{rúd}}\beta = \frac{1}{3}m\ell^2\beta,$$

amiből a tangenciális gyorsulás:

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{3}{4}g\cos\varphi.$$

Az ábra alapján láthatjuk, hogy a vízszintes a gyorsulást a centripetális gyorsulásból is kifejezhetjük ($a = a_{\mathrm{cp}}/\cos\varphi$), és hasonló módon a tangenciális gyorsulásból is megkaphatjuk ($a = a_{\mathrm{t}}/\sin\varphi$):

$$a = \frac{\frac{3}{2}g\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{3}{4}g\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Egyszerűsítések és átrendezések után a következő összefüggést kapjuk a φ szögre:

$$\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

amiből $\varphi \approx 35{,}3°$. Ezt visszahelyettesítve, a tömegközéppont vízszintes eredő gyorsulásának a nagysága:

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{4}g \approx 1{,}06g.$$

A rúdra ható ma eredő erő vízszintes. Mivel a nehézségi erő függőleges, ezért a csuklóerő vízszintes összetevője $K_x = ma$ nagyságú, függőleges összetevője pedig a nehézségi erőt kompenzálja: $K_y = mg$. Így a csuklóerő nagysága:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}mg \approx 1{,}46mg.$$

A csuklóerő irányát a vízszintessel bezárt szög tangenseként határozhatjuk meg:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{K_y}{K_x} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

amiből $\alpha \approx 43{,}3°$.

b) Az általános esetet a rúdhoz teljesen hasonlóan oldhatjuk meg. Az energiamegmaradás alapján

$$mgs\sin\varphi = \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

amiből

$$a_{\mathrm{cp}} = \omega^2 s = \frac{2mgs^2\sin\varphi}{\Theta}.$$

A nehézségi erő forgatónyomatéka alapján

$$mgs\cos\varphi = \Theta\beta,$$

amiből

$$a_{\mathrm{t}} = s\beta = \frac{mgs^2\cos\varphi}{\Theta}.$$

A vízszintes eredő gyorsulást most is kétféleképpen számíthatjuk ki:

$$a = \frac{a_{\mathrm{cp}}}{\cos\varphi} = \frac{a_{\mathrm{t}}}{\sin\varphi} = \frac{\frac{2mgs^2\sin\varphi}{\Theta}}{\cos\varphi} = \frac{\frac{mgs^2\cos\varphi}{\Theta}}{\sin\varphi},$$

amiből

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

vagyis az általános esetre is ugyanazt a szöget kapjuk: $\varphi \approx 35{,}3°$. Ennek megfelelően a tömegközéppont gyorsulásának nagysága:

$$a = \frac{\sqrt{2}mgs^2}{\Theta},$$

ami függ a test adataitól.

Megint elmondhatjuk, hogy a tengely által kifejtett erőnek a vízszintes összetevője $K_x = ma$, míg a függőleges összetevő most is $K_y = mg$. A tengely által kifejtett teljes erő nagyságát is az előzőhöz hasonlóan adhatjuk meg:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = mg\sqrt{\frac{2m^2s^4}{\Theta^2} + 1}.$$

Ugyanígy a tengely által a testre kifejtett erőnek a vízszintessel bezárt szögét a legegyszerűbb módon tangens függvénnyel határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{K_y}{K_x} = \frac{\Theta}{\sqrt{2}ms^2}.$$

c) Az előzőekből látszik, hogy akkor egyezik meg a φ szög az α szöggel, ha $\Theta = ms^2$. Ez csak akkor következhet be, ha a lapos test teljes tömege a tömegközéppontjában van koncentrálódva. Ezt a Steiner-tétel alapján láthatjuk be, hiszen akkor lesz a tömegközépponttól s távolságra lévő, párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomaték $\Theta = ms^2$, ha a tömegközépponton átmenő tengelyre $\Theta_{\mathrm{Tkp}} = 0$. Ez az eset például a fonálingára teljesül, vagy ehhez hasonlóan olyan tömegpontra, amely könnyű, vékony rúddal van a tengelyhez rögzítve.

Megjegyzés: Annak magyarázatát, hogy miért független a φ szög a test alakjától, a fizikai inga redukált hosszának bevezetésével adhatjuk meg. Minden fizikai ingához találhatunk egy olyan redukált hosszat ($\ell_{\mathrm{red}} = \frac{\Theta}{ms}$), hogy ha a fizikai ingát összehasonlítjuk az ℓ_{red} hosszú fonálingával, akkor ezek azonos rezgésidővel mozognak. Megmutatható az is, hogy nemcsak kis szögek esetén, hanem tetszőlegesen nagy szögű kezdeti kitérések esetén is (ezek akár 90°-os kitérések is lehetnek) az egyszerre elindított fizikai inga és a redukált hosszú fonálinga együtt fog lengeni. Fonálinga vagy súlytalan rúd végén lévő tömegpont esetén természetes, hogy a φ szög megegyezik az α szöggel, hiszen a felfüggesztés csak fonálirányú vagy rúdirányú erőt képes kifejteni.

2. feladat

Az ábrán látható módon, egy jól záró, rögzített dugattyúra ráhelyezünk egy függőleges tengelyű, alul nyitott hengert. A henger keresztmetszete $A = 0{,}01\,\mathrm{m}^2$, magassága $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$. Amikor a henger nyugalomban van, a dugattyú felső oldala a henger magasságának alsó egytizedénél van. A külső légnyomás $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

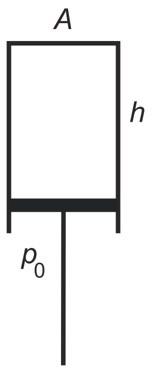
a) Mekkora a henger tömege?

A hengert lassan, egyenletesen $x = 0{,}2\,\mathrm{m}$-rel lejjebb húzzuk, majd elengedjük.

b) Mekkora erőt kell a hengerre kifejteni az elengedés előtt?

c) Mekkora sebességgel hagyja el a henger a dugattyút?

d) Mennyivel változott az elzárt levegő belső energiája a henger kilövése során?



Megoldás

a) Miközben a hengert lassan „ráhúzzuk” a dugattyúra, az elzárt gáz mennyisége, hőmérséklete nem változik, a gáz kezdeti $V = Ah$ térfogata a kilenctizedére csökken. Az izotermikus állapotváltozásra alkalmazzuk a Boyle–Mariotte-törvényt. Ebből a henger nyugalmi helyzetében az elzárt gáz nyomása:

$$p_0 V = p_1 \frac{9}{10} V \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{10}{9} p_0 = 1{,}11 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

A nyugalomban lévő hengerre ható erők eredője nulla ($g = 9{,}81\ \ \mathrm{m/s^2}$):

$$mg + p_0 A - p_1 A = 0,$$

$$m = \frac{(p_1 - p_0) A}{g} = 11{,}3\,\mathrm{kg}.$$

b) A Boyle—Mariotte-törvény segítségével az új állapothoz tartozó nyomást kiszámolhatjuk:

$$p_0 V = p_2 \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{3} \right) V \quad \rightarrow \quad p_2 = \frac{30}{17} p_0 = 1{,}77 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

Az újabb egyensúlyi helyzetre ismét használjuk, hogy az erők eredője nulla:

$$mg + F + p_0 A - p_2 A = 0, \quad \rightarrow \quad F = (p_2 - p_0)\, A - mg = 654\,\mathrm{N}.$$

c) Először határozzuk meg az elzárt gáz nyomását, amikor a henger alja eléri a dugattyú felső peremét. A folyamat a gyorsasága miatt adiabatikusnak tekinthető. Alkalmazzuk az adiabata-egyenletet:

$$p_2\left(\frac{17}{30}V\right)^{\frac{7}{5}} = p_3 V^{\frac{7}{5}} \quad\rightarrow\quad p_3 = \left(\frac{17}{30}\right)^{\frac{7}{5}} p_2 = \left(\frac{17}{30}\right)^{\frac{2}{5}} p_0 \approx 0{,}797 p_0 = 0{,}797\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}.$$

Alkalmazzuk a hengerre a munkatételt:

$$\sum W = \Delta E_{\mathrm{kin}},$$

$$W_{\text{gáz}} + W_{\text{légkör}} + W_{\text{grav}} = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\frac{p_2V_2 - p_3V_3}{\kappa - 1} + p_0\left(V_2 - V_3\right) + mg\frac{V_2 - V_3}{A} = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahol $V_2 = \frac{17}{30}V$, $V_3 = V$. Innen a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{p_2V_2 - p_3V_3}{\kappa - 1} + p_0\left(V_2 - V_3\right) + mg\frac{V_2 - V_3}{A}\right)} \approx 1{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

d) Alkalmazzuk az I. főtételt! Mivel a folyamat adiabatikus, azért $Q = 0$, tehát a belső energia változása:

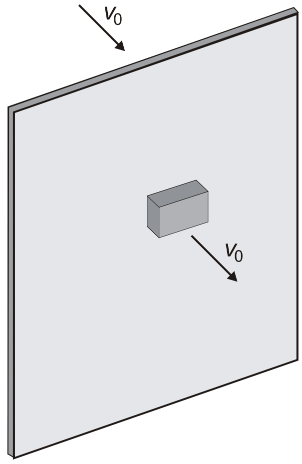
$$\Delta E_b = Q + W = W = -W_{\text{gáz}} = -\frac{p_2V_2 - p_3V_3}{\kappa - 1} = -305\,\mathrm{J}.$$

Megjegyzés:

A gáz belső energia-csökkenése (-305 J) főként a külső levegő nyomásával szembeni munkát fedezi (260 J), továbbá a henger helyzeti energiáját növeli (28,8 J), és csak igen kevéssé szolgáltatja a henger mozgási energiáját (16,2 J). Ez látszólag azt mutatja, hogy ez a szerkezet igen gyenge hatásfokú termopuska. Azonban ha kiszámítjuk, hogy mekkora munkával tudjuk a hengert lenyomni (55,4 J), akkor már nem is olyan rossz a hatásfok. Érdekes még azt is észrevenni, hogy a számítási eredményeink függetlenek a levegő hőmérsékletétől, az adatokból csak a levegő mólszámának az abszolút hőmérséklettel vett szorzata határozható meg.

3. feladat

Függőleges irányú, homogén mágneses térben függőleges helyzetű, nagy kiterjedésű szigetelő síklapot mozgatunk a síklapra merőleges, állandó, v_0 nagyságú sebességgel. A mozgó síklap előtt kis méretű, egyenletesen töltött, téglatest alakú testet mozgatunk a lapra merőleges irányú, szintén v_0 sebességgel. Mindeközben a kis test síklap felőli határolólapja a síklappal párhuzamos, és azzal gyakorlatilag összeér (lásd az ábrát). Adott pillanatban a kis testet elengedjük. Az elengedés utáni pillanatban a test a vízszintessel 45°-os szöget bezáró irányban kezd mozogni a síklapon. Fejezzük ki v_0 segítségével a kis test laborrendszerbeli sebességének nagyságát hosszú idő után! A lap és a test közötti súrlódási együttható értéke $\mu = 0{,}5$.



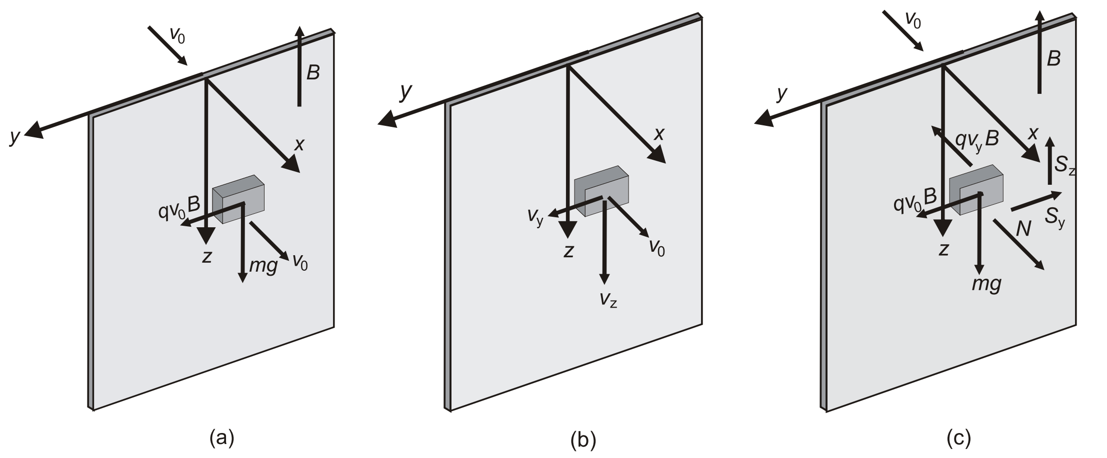
Megoldás

Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy nem kell megadnunk, hogy a függőleges irányú mágneses tér felfelé vagy lefelé irányul, illetve a töltés előjelét sem kell ismerni. A végeredmény független ezek megválasztásától. Tételezzünk fel felfelé irányuló mágneses indukcióvektort, illetve pozitív töltést. Attól sem kell megijednünk, hogy sem a töltés, sem a tömeg, sem a mágneses indukció nagyságának értéke sincs megadva. A test síklaphoz képesti indulási iránya fog ezen mennyiségek között kapcsolatot teremteni. A végeredményt v_0 egységekben várjuk, felhasználva μ numerikus értékét.

Az elengedés pillanatában az erőket az (a) ábrán láthatjuk. Mivel a szöveg szerint a vízszinteshez képest 45°-os szögben indul a test az

$$mg = qv_0B \tag{1}$$

összefüggésnek kell teljesülni. Indulás után kis idővel a test y és z irányban azonos



sebességre tesz szert. Ez annyit jelent, hogy a relatív sebességgel ellentétes irányú súrlódási erő szintén 45°-os szöget zár be a vízszintessel. Ez továbbra is igaz lesz, ezért a test ezen egyenes pályán mozog végig. A súrlódási erő iránya állandó, de nagysága változik a változó kényszererő miatt. De célunk nem a mozgás dinamikai leírása, elég csupán a végállapotra megállapításokat tenni.

A végállapotbeli sebességkomponensekhez és erőkomponensekhez tekintsük a (b) és a (c) ábrákat. A végállapotban az erők eredője zérus. Az x, y és z komponensekre rendre igaz:

$$N - qv_yB = 0, \tag{2}$$
$$qv_0B - S_y = 0, \tag{3}$$
$$mg - S_z = 0. \tag{4}$$

A súrlódási erő nagyságára igaz, hogy

$$\sqrt{S_y^2 + S_z^2} = \mu N. \tag{5}$$

Az (1) - (5) egyenleteket, illetve x irányra a sebességkényszert felhasználva a végállapotbeli sebességkomponensekre

$$v_x = v_0, \tag{6}$$
$$v_y = v_0\frac{\sqrt{2}}{\mu}, \tag{7}$$
$$v_z = v_0\frac{\sqrt{2}}{\mu} \tag{8}$$

adódik. A végsebesség nagyságára pedig

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v_0\sqrt{1 + \frac{4}{\mu^2}} = \sqrt{17}v_0 \tag{9}$$

adódik.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	A φ szög értéke:	2 pont
	A vízszintes gyorsulás értéke:	2 pont
	A csuklóerő értéke:	2 pont
	Az α szög értéke:	2 pont
b)	A φ szög értéke:	2 pont
	A vízszintes gyorsulás értéke:	2 pont
	A tengely által kifejtett erő értéke:	2 pont
	Az α szög értéke:	2 pont
c)	Tömegeloszlás feltételének megadása:	2 pont
	A feltételt teljesítő rendszer(ek) megadása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	Az elzárt gáz nyomásának meghatározása a Boyle–Mariotte-törvény segítségével:	2 pont
	A henger tömegének meghatározása:	2 pont
b)	Az új állapothoz tartozó nyomás kiszámolása a Boyle–Mariotte-törvény segítségével:	2 pont
	A szükséges erő kiszámolása az egyensúlyi helyzet vizsgálatával:	2 pont
c)	Az új állapot nyomásának kiszámolása az adiabata egyenletének segítségével:	4 pont
	A sebesség meghatározása a munkatétellel:	6 pont
d)	A belső energia megváltozásának kiszámolása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

A szöveg szerinti indulás feltételének megfogalmazása erőkkel, azaz kapcsolat az m, g, q, v_0, B paraméterek között:	2 pont
Annak felismerése, hogy a test egyenes pályán mozog:	2 pont
A sebesség- és a Lorentz-erő komponensek kapcsolatának megállapítása:	2 pont
Az erőegyensúly megfogalmazása x, y és z irányra:	3×3 pont
A kényszererő és a súrlódási erő (komponensek) kapcsolata:	2 pont
A lapra merőleges irányban a sebességkényszer megállapítása:	1 pont
A helyes sebesség meghatározása:	2 pont
Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.