



A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

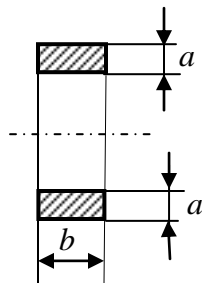
FIZIKA II. KATEGÓRIA

MEGOLDÁSI ÚTMUTATÓ

1./ Bevezetés

Ha egy rezgésre képes rugalmas testet például ütéssel rezgésbe hozunk, a test szabad rezgést végez, a rezgés frekvenciája a testre jellemző lesz. A frekvenciát a test geometriai adatai, és anyaga határozza meg. Ez a frekvencia a test sajátfrekvenciája.

Téglalap keresztmetszetű hangvilla esetén:



1. ábra

$$f_0 = \frac{1,875^2}{2\pi \cdot \ell^2} \cdot \sqrt{\frac{Ea^2}{12\rho}} \quad (1.)$$

ahol ℓ a villa ág hossza, a az ág keresztmetszetének vastagsága, (lásd az 1. számú ábra) E a hangvilla anyagának rugalmassági modulusa, és ρ az anyag sűrűsége.

A rezgésbe hozott test amplitúdója a különböző veszteségek (külső- és belső súrlódás, közegellenállás, stb.) hatására fokozatosan csökken, és a rezgés lecseng, megszűnik.

Ilyenkor beszélünk csillapított rezgésről. Az amplitúdó csökkenés időbeli lefolyását a csillapítási tényező (β) határozza meg, az alábbi összefüggés szerint:

$$y(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi), \quad (2.)$$

Ahol $y(t)$ a rezgésbe hozott test kitérése, A_0 az amplitúdó a $t=0$ időpontban,

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \text{ és } \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

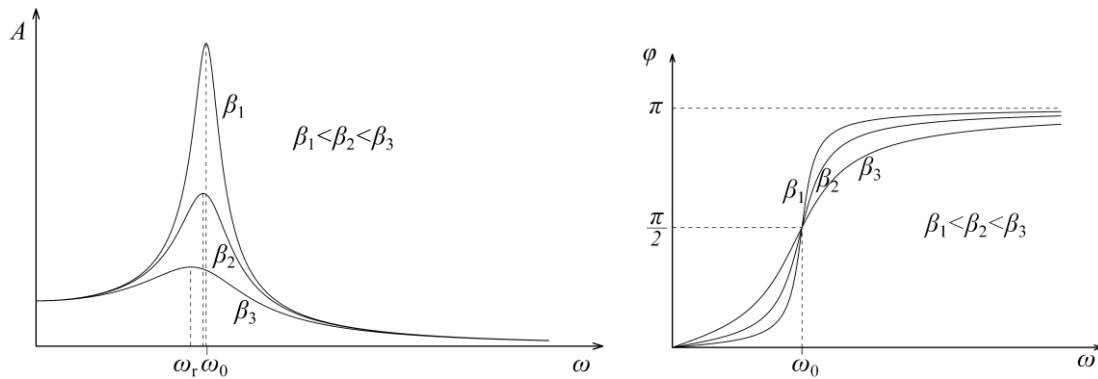
Amikor a rezgésre képes testet egy külső periodikus erővel ($F = F_0 \cos \omega t$) tartjuk rezgésbe, kényszerrezgésről beszélünk. Állandósult állapotban a kényszerrezgés a gerjesztő erő frekvenciájával működő csillapítatlan rezgés lesz. A kényszerrezgés amplitúdója valamint a gerjesztő erő és a kényszerrezgés közötti φ fáziskülönbség a gerjesztő erő ω körfrekvenciájától függ.

Amint ω (a gerjesztő erő körfrekvenciája) 0-tól ω_0 -ig (a gerjesztett rendszer saját körfrekvenciájáig) majd innen ∞ -ig nő, a φ fáziskülönbség 0-tól $\pi/2$ -ig, majd tovább π -ig növekszik, azaz a kényszerrezgés fázisban mindig elmarad a gerjesztő erőtől.

Az amplitúdó kis ω értéktől a körfrekvencia növekedésével fokozatosan növekszik, $\omega = \omega_0$ közelében maximumot ér el, majd növekvő ω -val csökken. Ezek szerint az amplitúdó akkor a legnagyobb, amikor a gerjesztő erő körfrekvenciája a gerjesztett rendszer saját frekvenciájának közelébe esik. Ilyenkor beszélünk rezonanciáról, az $A = A(\omega)$ görbe a rezonancia görbe.

(A rezonanciakörfrekvencia – az a frekvencia aminél a rezonancia bekövetkezik – pontos értékét az $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ kifejezés adja meg.)

Az A amplitúdó és a φ fázis változását az ω függvényében, különböző csillapítás mellett a 2. számú ábra mutatja.



2. ábra

Látható, hogy a rezonancia annál határozottabb, minél kisebb a csillapítási tényező. Elméletileg csillapítás nélkül az amplitúdó a rezonancia frekvenciánál végtelen nagy. A rezonancia jellemzésére szokásos a rezonancia görbe félértékszélességének megadása.

A félértékszélesség Δf annak a két frekvenciának a különbsége, ahol $A(\omega) = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Kis csillapítás esetén a csillapítási tényező is meghatározható a félértékszélesség ismeretében, ekkor:

$$\Delta f = \frac{\beta}{\pi}. \quad (3.)$$

2. A méréshez felhasználandó elemek:

2/a. Az acél alaplapra szerelt **hangvilla** lényegében egy nyélen lévő, U lakra hajlított acél rúd. Ha például egy ütéssel rezgésbe hozzuk, felhangjai hamar elenyésznek, és a továbbiakban az alaphang szól tovább. Ezért állandó frekvenciájú tiszta (szinuszos)

hangrezgések előállítására használják. A hangvilla két szára egymással ellentétes fázisban rezeg.

2/b. A hangvilla rezgéseit kondenzátor-**mikrofon** segítségével vizsgáljuk. A mikrofon gyenge jelét **előerősítővel** felerősítve vezetjük egy digitális **multiméterre**, ahol a rezgés amplitúdójával arányos feszültséget mérhetünk. A mikrofont piros műanyag tömbbe helyeztük el. A tömb az aljába szerelt mágnes segítségével az alaplap tetszőleges helyén jól rögzíthető. Az előerősítő tápfeszültségét az erősítőt tartalmazó dobozban elhelyezett elem biztosítja.

2/c. A hangvilla **elektromágnes** segítségével hozható rezgésbe. Az elektromágnest (piros műanyag csévetesten lévő tekercsben, lágyvas maggal) fekete műanyag tömbbe építettük be. Ez a tömb is az aljába szerelt mágnesek segítségével az alaplapon bárhol jól rögzíthető. Az elektromágnest **hanggenerátorról**, változtatható frekvenciájú szinuszos árammal működtetjük. A hanggenerátor kezelő szervei közül csak a frekvenciaállító gombot kell működtetnie!

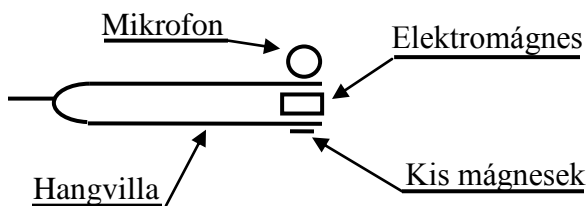
2/d. A multiméter és a hanggenerátor kezelésével kapcsolatos tudnivalókat a helyszínen található leírás tartalmazza.

2/e. 15 db. 10x10x1 mm-es stroncium-ferrit mágnes. Egy darab tömege 0,5 g.

2/f. 1 db ismeretlen tömegű 15 x 15 x 2 mm méretű neodímium mágnes.

3. Feladatok

3.1. A gerjesztő **elektromágnest** helyezze a hangvilla végéhez, a két ág közé. A hangvilla rezgéseit érzékelő kondenzátor-mikrofont pedig az elektromágnessel szemben, a hangvilla mellé, a 3. ábra szerint.



3. ábra

Mérje meg, hogy hogyan változik az érzékelő kimenetén (a multiméteren) mérhető feszültség a hanggenerátor frekvenciájának függvényében. Táblázatban tüntesse fel a mért feszültségeket, a hanggenerátor-frekvencia függvényében. Mérési eredményeit felhasználva a frekvencia függvényében milliméterpapíron ábrázolja a mért feszültségeket.

Ennél a feladatnál mérés közben a hanggenerátor frekvenciáját a **216 Hz-től a 222 Hz-ig** lévő tartományban változtassa. A mérési pontok sűrűségét a jel változásának függvényében válassza meg.

A hanggenerátor csak 0,1 Hz-enként jelzi a frekvenciát. Előfordulhat, hogy a maximális amplitúdó a két kijelzett frekvencia között jelentkezik!

3.2. A 3.1. feladat eredményeit felhasználva határozza meg a hangvilla saját frekvenciáját. Indokolja választát! Adja meg a rezonanciagörbe félértékszélességét, valamint a β csillapítási tényező értékét.

3.3. A 3.1 feladat megoldásánál alkalmazott elrendezést hagyja változatlanul. A hanggenerátor frekvenciáját tartsa azon az értéken, ahol megtalálta a hangvilla sajátfrekvenciáját. A 15x15x2 mm-es neodímium mágneset helyezze a hangvilla oldalára, arra merőlegesen, (a mágnes 15 x 15 mm-es lapja legyen függőleges síkban és a 15 x 2 mm-es lapja érintkezzen a hangvilla oldallapjával) a villa szárának végétől 1 cm-re. Mérje meg most a rezonancia frekvenciát. Ebből a helyzetből kiindulva, vizsgálja meg, hogy miként alakul a rezonancia frekvencia értéke akkor, ha a mágneset kis (5 – 10 mm-es) lépésekkel végigviszi a hangvilla szárán. A mágnes helyzetét mindig a villa végétől mért távolsággal adja meg!

Táblázatban adja meg a mágnes helyének függvényében a mért rezonanciafrekvenciákat. Ábrázolja milliméterpapíron a mért rezonanciafrekvencia értékeket a hely függvényében.

3.4. Milyen megállapítást tehet a 3.3. feladat eredményei alapján? Mit jelez a jel maximuma?

3.5. Helyezzen a hangvilla-szár végére a 3. ábra szerint kis méretű (10 x10 x 1 mm-es) stroncium-ferrit mágneseket. (1 db mágnes tömegét tekintse 0,5 g-nak.) Határozza meg a hangvilla rezonancia-frekvenciájának alakulását 1, 2,15 db mágnes felhelyezésének hatására. Mérési eredményeit foglalja táblázatba, és rajzolja fel a tömeg függvényében a mért rezonanciafrekvenciákat.

3.6. A 3.5. feladat pontjaira illesszen függvényt, adja meg a függvény egyenletét, majd a kapott egyenlet felhasználásával állapítsa meg a 15x15x2 mm-es méretű neodímium mágnes tömegét.

A mérés elvégzéséhez 4 óra áll rendelkezésre. A feladatok megoldásához számítógép és telekommunikációs eszköz kivételével bármilyen segédeszköz használható. Ha valamelyik eszközzel problémája van, forduljon a felügyelő tanárhoz.

Jó munkát!

Megoldások

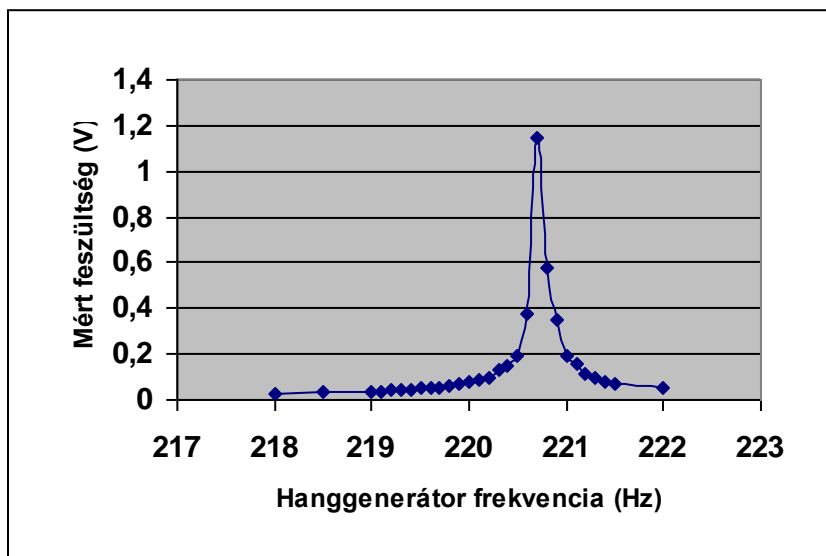
3.1. feladat megoldása. (6 pont)

A mérési eredmények táblázata

A hanggenerátor frekvenciája (Hz)	Mért feszültség (V)	A hanggenerátor frekvenciája (Hz)	Mért feszültség (V)	A hanggenerátor frekvenciája (Hz)	Mért feszültség (V)	A hanggenerátor frekvenciája (Hz)	Mért feszültség (V)
216,0	0,0215	219,0	0,0377	220,0	0,0775	221,0	0,1895
216,5	0,0223	219,1	0,0391	220,1	0,0852	221,1	0,1545
217,0	0,0233	219,2	0,0418	220,2	0,0953	221,2	0,1125
217,5	0,0249	219,3	0,0434	220,3	0,1274	221,3	0,0985
218,0	0,0273	219,4	0,0469	220,4	0,1526	221,4	0,0800
218,5	0,0315	219,5	0,0484	220,5	0,1944	221,5	0,0733
		219,6	0,0530	220,6	0,3752		
		219,7	0,0561	220,7	1,1495	222,0	0,0492
		219,8	0,0594	220,8	0,5750		
		219,9	0,0663	220,9	0,3494		

1. táblázat

A mérési eredmények felhasználásával készült grafikon:



1. grafikon

3.2. feladat megoldása. (9 pont)

Mivel a hangvilla gerjesztését elektromágnes segítségével végezzük, a kényszerrezgés frekvenciája az elektromágneset meghajtó generátor frekvenciájának kétszerese. Az elektromágnes a meghajtó szinuszos áram mind két fél periódusában vonzza a hangvillát. A legnagyobb feszültséget akkor mértük, amikor a hanggenerátor frekvenciája 220,7 Hz volt. Tehát a hangvilla saját frekvenciája: 441,4 Hz

A legnagyobb mért feszültség értéke 1,1495V volt, $A = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,8128V$. Ezt a

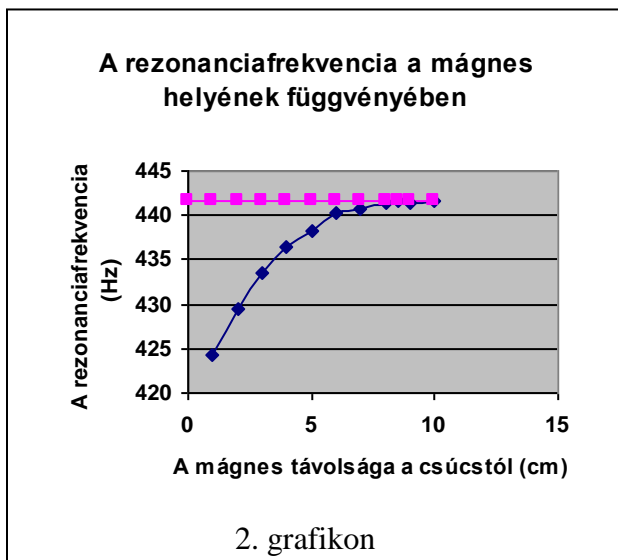
feszültséget 441,2 és 441,4Hz, valamint 441,4 és 441,6 Hz között találjuk. Interpolálással a két frekvencia: $f_1 = 441,31\text{Hz}$, illetve $f_2 = 441,52\text{Hz}$, ebből $f_2 - f_1 = 0,21\text{Hz}$. Tehát a hangvilla rezonanciagörbéjének félértékszélessége: 0,21 Hz. A (3.) összefüggésből, pedig a csillapítási tényező: $\beta = \pi \cdot \Delta f = 0,66\text{Hz}$.

3.3. feladat megoldása. (6 pont)

A hangvilla sajátfrekvenciájának meghatározása után (441,6 Hz) a 15x15x2 mm-es mágneset a villa csúcsától 1 cm-re, a villa ágára merőlegesen elhelyezve meghatároztuk a rendszer rezonanciafrekvenciáját. Ezt ismételtük meg a mágneset különböző távolságokra téve a csúcstól. A mérési eredményeket a 2. táblázatban tüntettük fel.

A mágnes távolsága a villa csúcsától (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8,5	9	10
Rezonanciafrekvencia (Hz)		424,2	429,4	433,6	436,4	438,2	440,2	440,8	441,4	441,6	441,4	441,6

2. táblázat



3.4. feladat megoldása. (6 pont)

A mérési eredményekből, valamint a grafikon menetéből az látszik, hogy a csúcstól 8 cm-re, vagy ettől távolabbra elhelyezett mágnes már nincs hatással a hangvilla saját frekvenciájára. A rezgő hangvilla befogása közelében lévő pontjai nem mozognak. (A grafikonon feltüntettük a 441,6 Hz-es sajátfrekvenciát is.

3.5. feladat megoldása. (7 pont)

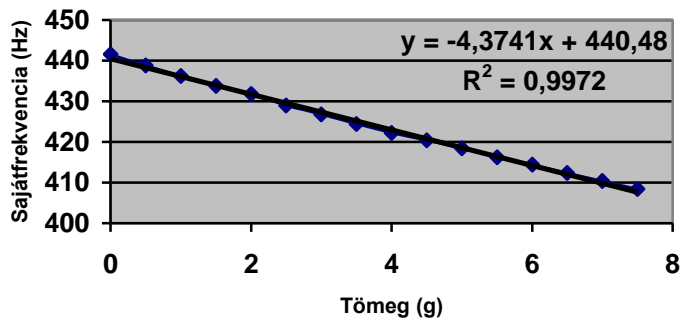
Az egyes tömegeknek a hangvilla-szár végére helyezése miatt a rendszer elhangolódik, és sajátfrekvenciája az alábbiak szerint alakul. (Itt is a hanggenerátor frekvenciájának a kétszeresét kell figyelembe venni!)

Tömeg (g)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5
Saját-frekvencia (Hz)	441,6	438,8	436,2	433,8	431,8	429	426,8	424,4	422,2	420,4	418,2	416,2	414,4	412,4	410,4	408,8

3. táblázat

A mért adatok alapján a hangvilla sajátfrekvenciája a rá helyezett tömeg függvényében az alábbiak szerint alakul:

A hangvilla sajátfrekvenciája a rá helyezett tömeg függvényében



3. grafikon

3.6. feladat megoldása. (6 pont)

A 3.5. feladatnál felrajzolt mérési pontokra jól illeszthető egy egyenes. Az egyenes egyenlete:

$$y = -4,3741x + 440,48$$

A mérendő mintát a hangvillára helyezve, (arra a helyre, ahová korábban a tömegeket helyeztük) a mért sajátfrekvencia értéke: 424,2 Hz.

Ezt az értéket az egyenletbe helyettesítve, és az egyenletet megoldva kapjuk, hogy a minta tömege: $m = 3,72g$.