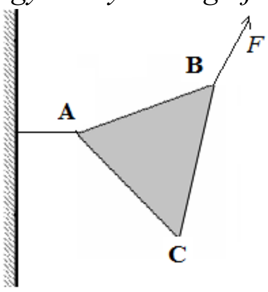
Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első fordulójának feladatai és megoldásai fizikából

FIZIKA
I. KATEGÓRIA

<u>Javítási-értékelési útmutató</u>

1.) *Egy szabályos háromszög alakú, m tömegű, egyenletes tömegeloszlású, függőleges síkú lemez egyensúlyát vizsgáljuk. A háromszög A és B csúcsaihoz fonalakat erősítünk.*

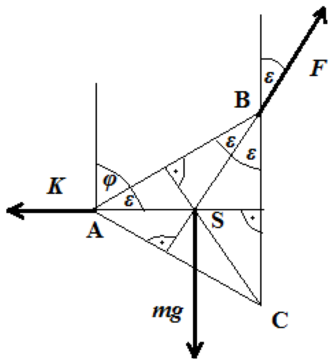


a) Mekkora az F erő nagysága, és milyen az iránya, ha az AB oldal 60°*-os szöget zár be a függőlegessel és az A csúcsnál lévő fonál vízszintes?*

b) Mekkora az F erő nagysága, és milyen az iránya, ha az AB oldal φ szöget zár be a függőlegessel és az A csúcsnál lévő feszes fonál vízszintes?

c) Mekkora lehet a b) esetben φ értéke?

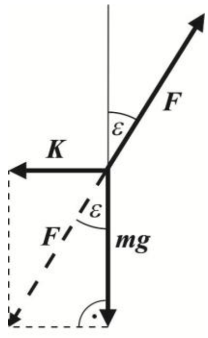
Megoldás. *a)* Mivel a háromszög *AB* oldala $\varphi = 60^{\circ}$-os szöget zár be a függőlegessel, és az *A* csúcsnál lévő fonál, azaz a *K* erő hatásvonala vízszintes, ezért ez az egyenes $\boldsymbol{\varepsilon} = 30^{\circ}$-os szöget zár be az *AB* oldallal, tehát a háromszög *BAC* szögének szögfelezője, ami átmegy a háromszög *S* súlypontján. A háromszög-lemez homogén anyageloszlású, így a nehézségi erő hatásvonala is átmegy a súlyponton. (1. ábra)



1. ábra

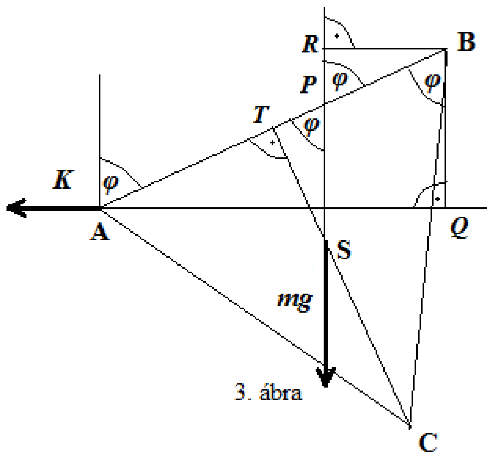
A test egyensúlya miatt a rá ható erők bármely, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkozó forgatónyomatékainak összege nulla. Az *S* súlyponton átmenő ilyen tengelyre nézve a *K* és *mg* erők karja nulla, ezért forgatónyomatékuk is. Tehát az *F* fonálerő erre a tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka és ezzel erőkarja is nulla kell, hogy legyen, azaz hatásvonalának át kell mennie az *S* súlyponton. Az *F* erő hatásvonala a *B* csúcsnál lévő szög szögfelezője, vagyis a hatásvonal a függőlegessel $\varepsilon = 30^{\circ}$-os szöget zár be.

A test egyensúlya miatt a rá ható erők vektori összege is nulla (2. ábra).



2. ábra

$$\cos\varepsilon = \frac{mg}{F} \quad \text{miatt} \quad F = \frac{mg}{\cos\varepsilon} = \frac{mg}{\cos 30^{\circ}} = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{1{,}15\,mg}\,.$$



3. ábra

b) Legyen a forgástengely a lap síkjára merőleges, és menjen át a *B* ponton. Az *F* erő forgatónyomatéka erre a tengelyre nulla, vagyis a *K* és az *mg* erőé azonos nagyságú és ellentétes irányú kell, hogy legyen.
Legyenek a háromszög oldalai *a* hosszúak (3. ábra).
A *K* erő karja az *AQB* háromszögből

$$BQ = a \cdot \cos\varphi .$$

A nehézségi erő karja

$$RB = PB \cdot \sin\varphi = (BT - PT) \cdot \sin\varphi .$$

$$BT = \frac{1}{2}a .$$

Mivel $CT = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, és a súlypont a súlyvonalat az oldal felől harmadolja, ezért

$$TS = a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = a\frac{\sqrt{3}}{6} ,$$

ezzel a *TPS* háromszögből

$$TP = a\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\varphi} .$$

Tehát a nehézségi erő karja

$$RB = (\frac{1}{2}a - a\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}\varphi}) \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}a \cdot (\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi) .$$

A forgatónyomatékok egyenlősége miatt

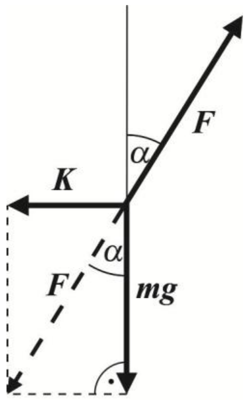
$$Ka\cos\varphi = mg\frac{a}{2}(\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi),$$

amiből

$$K = \frac{1}{2}mg(\mathrm{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}) .$$

Az erők vektori összege is nulla (4. ábra), ebből

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{K}{mg} = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}) .$$



4. ábra

Vagyis $$\alpha = \mathrm{arctg}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3})\right] .$$

Pitagorasz-tétellel $$F = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} .$$

Amennyiben ezen utóbbi összefüggésekbe $\boldsymbol{\varphi}$ = 60°-ot helyettesítünk, akkor az *a)* esetbeli eredményeket kapjuk:

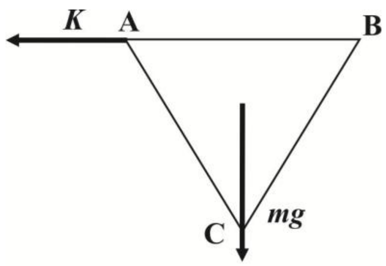
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}60° - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

azaz $\alpha = \varepsilon = 30°$, illetve

$$F = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\mathrm{tg}60° - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$F = mg\sqrt{1 + \frac{1}{3}} = mg\,\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{1{,}15\,mg}.$$

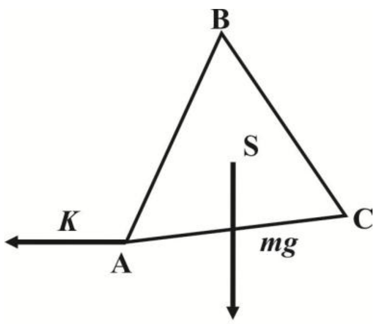
c) Ha a háromszög *B* csúcsa az *A* csúcson átmenő vízszintes egyenesen van, akkor a *K* erő ***B*** ponton átmenő vízszintes tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka is nulla, a nehézségi erőé viszont nem, tehát nem lehet egyensúly. (5. ábra)



5. ábra

Ha a háromszög *B* csúcsa az *A* csúcson átmenő vízszintes egyenes alatt van, akkor a ***K*** és a nehézségi erő *B* ponton átmenő vízszintes tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai azonos irányúak (a fonál csak húzni tud), tehát nem lehet egyensúly. Tehát φ < 90°. ($\varphi \to 90°$ esetén $F \to \infty$.)

Ha a háromszög *B* csúcsa az *S* súlyponton átmenő függőleges egyenesen van, akkor a *K* erő nulla, a fonál nem feszes. (6. ábra)



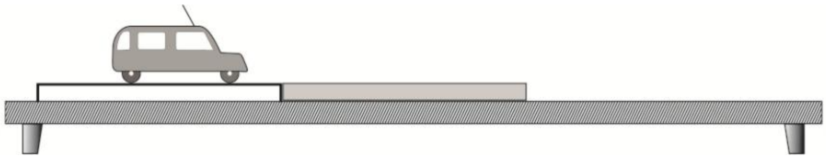
6. ábra

Ha a háromszög *B* csúcsa az *S* súlyponton átmenő függőleges egyenestől balra van, akkor a *K* és a nehézségi erő *B* ponton átmenő vízszintes tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai azonos irányúak (a fonál csak húzni tud), tehát nem lehet egyensúly. Tehát $\varphi \geq \mathbf{30°}$.

Összefoglalva: φ lehetséges értékeinek intervalluma: $\mathbf{30° \leq \boldsymbol{\varphi} < 90°}$.

2.) *Vízszintes, elegendően hosszú asztalon fekszik egy merev,* 5 dkg *tömegű vékony műanyaglap. A* 40 dkg *tömegű, távirányítós játékautó* 3 m/s *sebességgel ráhajt a műanyaglapra, és amint mind a négy kerék rajta van, blokkolva fékez. Az autó első és hátsó tengelyének távolsága* 12 centiméter. *A kerekek és a műanyaglap közötti csúszási súrlódási együttható* 0,2, *a műanyaglap és az asztallap között* 0,15.

a) Legalább milyen hosszú a műanyaglap, ha az autó nem csúszik le róla?
b) Mennyi idő alatt és milyen hosszú úton áll meg az autó az asztalhoz képest?
c) Mennyi hő keletkezik az abroncsok és a műanyaglap, illetve a műanyaglap és a talaj között a teljes megállásig?



Megoldás. Adatok: $\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}15$, m = 0,05 kg, M = 0,4 kg, v_0 = 3 m/s, d = 0,12 m.

a) A dinamika alapegyenletét alkalmazva, a játékautó lassulása:

$$A = \mu_1 \cdot g = 2 \text{ m/s}^2.$$

A műanyaglap gyorsulása:

$$a_1 = \frac{\mu_1 M - \mu_2 (M+m)}{m} g = 2{,}5 \text{ m/s}^2.$$

A játékautó lassulva, a műanyaglap gyorsulva egyaránt t_1 idő múlva éri el a közös sebességet:

$$v_0 - A \cdot t_1 = a_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{A + a_1} = 0{,}67 \text{ s.}$$

Ekkor az autó és a műanyaglap közös sebessége:

$$v = a_1 \cdot t_1 = 1{,}67 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A műanyaglap minimális hosszát megkapjuk a játékautó és a műanyaglap asztallaphoz viszonyított elmozdulásainak különbségével, figyelembe véve az autó első és hátsó tengelyének távolságát:

$$L = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t_1 - \frac{v \cdot t_1}{2} + d = \frac{v_0 \cdot t_1}{2} + d = \mathbf{1{,}12 \text{ m.}}$$

b) Amikor a játékautó a műanyaglaphoz képest már áll, közös a lassulásuk, és a fékezési idejük:

$$a_2 = \mu_2 \cdot g = 1{,}5 \text{ m/s}^2, \quad t_2 = \frac{v}{a_2} \approx 1{,}11 \text{ s}.$$

Az autó az asztalhoz képest $t = t_1 + t_2 = \approx \mathbf{1{,}78 \text{ s}}$
idő alatt áll meg.
Az autó asztalhoz viszonyított elmozdulása:

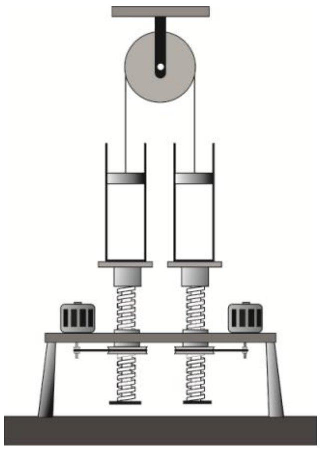
$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t_1 + \frac{v^2}{2a_2} \approx \mathbf{2{,}48 \text{ m}}.$$

c)

$$Q_1 = W_1 = F_{s1} \cdot (L - d) = \mu_1 M g (L - d) = \mathbf{0{,}8 \text{ J}},$$

$$Q_2 = W_2 = F_{s2} \cdot s' = \mu_2 (M+m) \cdot g \cdot \frac{v \cdot (t_1 + t_2)}{2} = \mathbf{1 \text{ J.}}$$

3) *Tekintsük az ábrán lévő összeállítást:*



Két motorosan állítható asztalon két egyforma függőleges henger található, melyeket könnyen mozgó dugattyúk zárnak le. A két hengerben azonos anyagmennyiségű és ugyanolyan állapotú levegő van, mindkettőben 300 K *a hőmérséklet és* 10^5 Pa *a nyomás. A külső levegő ugyanilyen nyomású és hőmérsékletű. A hengerek* 10 kg *tömegűek, a dugattyúk* 5 kg*-osak, ezekhez képest a bezárt levegő tömege elhanyagolható, a bezárt légoszlopok kezdetben* 10 cm *magasságúak, a dugattyúk felülete* 100 cm^2*-es. A két dugattyúhoz könnyen mozgó állócsigán átvetett, elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan kötél csatlakozik. Kezdetben a rendszer szimmetrikus egyensúlyi állapotban van.*

a) A jobb oldali tartály alatti asztal tetőlapját 1 *órán keresztül* 1 mm/perc *sebességgel mozgatjuk lefelé, majd az asztalt megállítjuk. Ez a sebesség olyan kicsiny, hogy feltehetjük, hogy a hengerekben lévő levegő hőmérséklete nem változik. Az asztal motorjának bekapcsolása után mennyi idővel válik el a bal oldali henger alja a bal oldali asztal tetőlapjától (vagyis mikor szűnik meg az erőhatás a henger alja és az asztal tetőlapja között)?*

b) A jobb oldali asztal motorjának kikapcsolását követően bekapcsoljuk a bal oldali asztal motorját, így a bal oldali tetőlap 1 mm/perc *sebességgel elindul felfelé. Mennyi ideig kell mozgatni a bal oldali asztal tetőlapját ahhoz, hogy a bal oldali hengerben visszaálljon az eredeti* 10^5 Pa *nyomás?*

c) Az eredeti 10^5 Pa *nyomás visszaállását követően még mennyi ideig kell továbbra is járatni a bal oldali asztal motorját* 1 mm/perc *sebességgel felfelé, hogy meglazuljon a két dugattyút összekötő kötél?*

Megoldás. *a)* Kezdetben a bezárt levegő nyomása mindkét oldalon 10^5 Pa = 10 N/cm^2, a két dugattyút a kötélszárakban ébredő 50 N-os feszítőerő tartja. A bal oldali henger akkor válik el az asztaltól, ha a feszítőerő 150 N értékűre növekszik. Vegyük észre, hogy a kétoldali kötélerő azonossága miatt a nyomások is megegyeznek a hengerekben. Ha a kötélerő 50 N-ról 150 N-ra növekszik, akkor a hengerekben a nyomás 1 N/cm^2-rel csökken, vagyis 9 N/cm^2-es lesz. Tehát a bezárt levegő magassága

$$y = \frac{10}{9} \cdot 10 \text{ cm} = \frac{100}{9} \text{ cm}$$

lesz mindkét oldalon. Ehhez a bal oldalon a dugattyúnak y – 10 cm = $\frac{10}{9}$ cm-rel kell emelkednie, ami a jobb oldalon a dugattyú $\frac{10}{9}$ cm-es süllyedését okozza. Ezért a jobb oldali asztalnak kétszer ekkora mértékben, vagyis $\frac{20}{9}$ cm = $\frac{200}{9}$ mm-rel kell süllyednie. Mivel az asztal percenként 1 mm-t süllyed, ez az állapot $\frac{200}{9}$ perc = **22,2 perc** múlva következik be.

Vegyük észre, hogy ekkor nemcsak a bal oldalon válik el a henger az asztal tetőlapjától, hanem a jobb oldalon is. Mivel a motor a jobb oldalon még 37,8 percig lefelé mozgatja a tetőlapot, így a jobb oldali motor kikapcsolásakor a jobb oldalon a henger alja és az asztal tetőlapja között 37,8 mm-es távolság alakul ki. Lényegében kialakul egy ekkora „játéktér”, vagyis ezen belül gyakorlatilag erőhatás nélkül bármilyen helyzet előállítható. (Az elhanyagolhatónak tekintett, ámde mégis létező csigatengely-súrlódás miatt a bal oldalon a henger gyakorlatilag az asztalon marad, minimális erővel nyomja az asztalt, és a jobb oldalon alakul ki a hézag.)

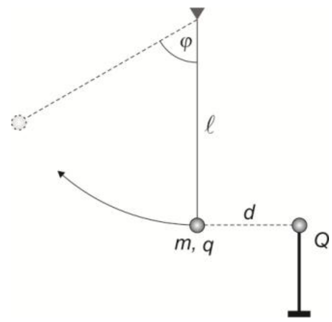
b) Ha bekapcsoljuk a bal oldali asztal motorját, akkor 37,8 percig tart, amíg visszaáll az az állapot, amikor már éppen érintkezik mindkét henger a két tetőlappal, de még egyik oldalon sincs erőhatás az asztalok lapján. Ha a bal oldalon visszaáll az eredeti 10^5 Pa nyomás, akkor ugyanez lesz a nyomás a jobb oldalon is, mert a kötélerő mindig megegyezik a két oldalon. A jobb oldalon a dugattyúnak ehhez $\frac{10}{9}$ cm-rel kell süllyednie, ami a bal oldalon a dugattyú $\frac{10}{9}$ cm-rel történő emelkedéséhez vezet. Tehát a bal oldalon akkor áll vissza az eredeti 10^5 Pa nyomás, ha a bal oldali asztallap kétszer ekkora mértékben, vagyis $\frac{20}{9}$ cm = $\frac{200}{9}$ mm-rel emelkedik, amihez megint 22,2 perc kell. Tehát összesen **1 óra** időtartamra kell bekapcsolni a bal oldali asztal motorját, hogy visszaálljon a kezdeti állapot (mindkét hengerben).

Megjegyzés: Ha észrevesszük, hogy a rendszer állapotában nem következik be változás, ha az egyik oldalon felfelé, a másikon meg ugyanannyival lefelé mozgatjuk az asztalokat, akkor a *b)* kérdésre mindenféle más meggondolás nélkül is megadhatjuk a választ, hiszen ha a jobb oldal 6 cm-t süllyedt, akkor a bal oldalnak 6 cm-t kell emelkednie, hogy visszaálljon az eredeti nyomás.

c) Akkor lazul meg a kötél, ha a hengerekben lévő gáz nyomásnövekedéséből származó erő megtartja a dugattyúk súlyát, vagyis a nyomás eléri a 10,5 N/cm^2-es értéket. Ehhez a jobb oldalon a dugattyúnak $10\text{ cm} - \frac{10\text{ N/cm}^2}{10{,}5\text{ N/cm}^2}\cdot 10\text{ cm} = \frac{10}{21}\text{ cm} \approx 4{,}76\text{ mm}$-t kell süllyednie, ami akkor következik be, ha a bal oldalon a henger ennek kétszeresét, vagyis még kb. 9,5 mm-t emelkedik, amihez **9,5 perc** szükséges.

4) *Szigetelő állvány tetején rögzített kisméretű test töltése* $Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C. *Vékony,* ℓ = 10 cm *hosszú szigetelő szálon felfüggesztett, az előzővel azonos magasságban, tőle d* = 5 cm *távolságban tartott kicsiny gömb tömege m* = 1 g. *A gömb elengedése után a fonál maximálisan* φ = 60°*-os szöggel tér ki.*

Mekkora a kis gömb q töltése?

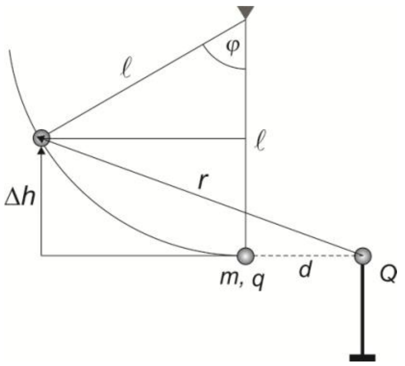


Megoldás. *a)* Adatok: φ = 60°, d = 0,05 m, ℓ = 0,1 m, m = 1 g, $Q = 6\cdot10^{-7}$ C.
q = ?

A nyugalomból induló kis gömb legnagyobb kitérése akkor jön létre, amikor indulása után először ismét nyugalomba kerül. Erre a folyamatra felírható a munkatétel, amelynek értelmében az elektromos mező munkájának és a nehézségi erő munkájának összege zérus. Figyelembe véve, hogy az elektrosztatikus erő munkája független az úttól, csak a kezdő- és végpont helyétől függ:

$$-mg\Delta h + kqQ\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Meg kell határoznunk az emelkedés Δh magasságát és az r távolságot. Az ábra alapján



$$\Delta h = \ell(1 - \cos\varphi),$$

$$r = \sqrt{(\Delta h)^2 + (d + \ell\sin\varphi)^2}\ .$$

Felhasználhatjuk, hogy speciálisan $d = \ell/2$, ezzel r így írható:

$$r = \sqrt{(\Delta h)^2 + \ell^2\left(\frac{1}{2} + \sin\varphi\right)^2}.$$

Δh és r numerikus értékei: $\Delta h = \ell(1 - \cos\varphi) = 0{,}1\ \text{m}(1 - \cos 60°) = 0{,}05\ \text{m},$

és $r = \sqrt{(\Delta h)^2 + \ell^2\left(\frac{1}{2} + \sin\varphi\right)^2} = \sqrt{0{,}05^2\,\text{m}^2 + 0{,}1^2\ \text{m}^2\left(\frac{1}{2} + \sin 60°\right)^2} = 0{,}1455\ \text{m}.$

A munkatételből q kifejezése után adataink beírásával a keresett töltésre kapjuk:

$$q = \frac{mg\Delta h}{kQ\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right)} = \frac{10^{-3}\text{kg}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0{,}05\ \text{m}}{9\cdot10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\cdot 6\cdot10^{-7}\text{C}\left(\frac{1}{0{,}05\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}1455\ \text{m}}\right)} = \mathbf{6{,}92\cdot10^{-9}}\ \text{C}.$$

Értékelési útmutató

1. feladat.

a) A háromszög megfelelő helyzetének felismerése	1 pont
Az erők hatásvonalai a súlyponton mennek át	2 pont
A vektorok összege nulla összefüggésből az ***F*** erő nagysága	2 pont
az ***F*** erőiránya	2 pont
b) a ***K*** erő karjának felírása	1 pont
a nehézségi erő karjának „felfedezése”	1 pont
TP szakasz hosszának felírása	2 pont
RB szakasz hosszának felírása	1 pont
a forgatónyomatékok egyenlőségének felírása	1 pont
a ***K*** fonálerő meghatározása	1 pont
A vektorok összege nulla összefüggésből az ***F*** erő nagysága	1 pont
az ***F*** erőiránya	1 pont
c) $\varphi < 90^{o}$. Ha az egyenlőséget is megengedi, akkor csak 1 pont adható	2 pont
$\varphi \geq \mathbf{30}^{o}$.	2 pont
	Összesen: 20 pont

2. feladat.

a) A játékautó és a műanyaglap gyorsulásának helyes meghatározása:	2 + 2 pont
A két test közös sebességének eléréséig eltelt idő helyes meghatározása:	2 pont
A műanyaglap legkisebb hosszának meghatározása:	2 pont
b) A játékautó és a műanyaglap közös gyorsulásának meghatározása (amikor már együtt lassulnak):	1 pont
A két test közös lassulásakor eltelt idő meghatározása:	1 pont
Az autó (asztalhoz viszonyított) megállási idejének meghatározása:	2 pont
Az autó asztalhoz viszonyított elmozdulásának helyes meghatározása:	2 pont
c) Az abroncsok és a műanyaglap között keletkező hő a teljes megállásig:	3 pont
A műanyaglap és az asztallap között keletkező hő a teljes megállásig:	3 pont
	Összesen: 20 pont

3. feladat.

a) Annak észrevétele, hogy a kötélszárakban egyenlők az erők:	2 pont
Annak észrevétele, hogy a két tartályban a nyomás azonos:	1 pont
Annak észrevétele, hogy 9 N/cm^2-es nyomásnál válnak el a hengerek:	2 pont
A dugattyúk elmozdulásának kiszámítása:	2 pont
A jobb oldali asztal elmozdulásának kiszámítása:	2 pont
A kérdéses idő (22,2 perc) meghatározása:	1 pont
b) Annak észrevétele, hogy kétszer 37,8 percig nem dönthető el egyértelműen, hogy milyen helyzetben vannak a hengerek:	2 pont
Annak észrevétele, hogy továbbra is szimmetrikus a nyomás a két oldalon:	2 pont
A kérdéses idő (1 óra) meghatározása:	1 pont
c) Annak felismerése, hogy mi a kötél meglazulásának feltétele:	2 pont
A dugattyúk elmozdulásának kiszámítása:	2 pont
A kérdéses idő (9,5 perc) meghatározása:	1 pont
	Összesen: 20 pont

4. feladat.

A munkatétel helyes felírása	5 pont
Az emelkedés és elmozdulás közötti kapcsolat helyes meghatározása	10 pont
Az *r* távolság numerikus értékek helyes kiszámítása	2 pont
A *q* töltés numerikus megadása	3 pont
	Összesen: 20 pont

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár. A nehézségi gyorsulás értékére 9,81 m/s^2 vagy 10 m/s^2 egyaránt elfogadható.