A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

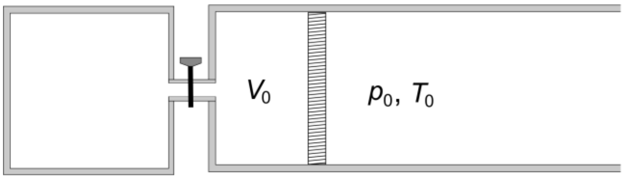
FIZIKA

I. KATEGÓRIA

Javítási-értékelési útmutató

1.) Hőszigetelt tartályban légüres tér (vákuum) van, a tartályon kívüli szabad térben a levegő hőmérséklete T_0 = 300 K. A tartályt egy csappal ellátott vékony csővel egy szintén hőszigetelt hengerhez csatlakoztatjuk, melyben igen könnyű, hőszigetelő anyagból készült dugattyú zár el V_0 = 20 liter térfogatú levegőt, melynek nyomása és hőmérséklete megegyezik a külső levegőével. A csapot óvatosan kinyitjuk, majd a tartály belevegőzése után elzárjuk. Azt vesszük észre, hogy a dugattyú majdnem hozzáér a henger végéhez.

a) Határozzuk meg a tartály térfogatát és a tartályba áramlott levegő hőmérsékletét!



Nagyon hosszú idő elteltével (mivel a hőszigetelés ugyan igen jó, de nem tökéletes) a tartályban lévő levegő hőmérsékleti egyensúlyba kerül a környezetével, T_0 = 300 K hőmérsékletű lesz. Ekkor a jobb oldali hengerben a kezdeti állapothoz hasonló helyzetet állítunk elő, vagyis a dugattyú V_0' térfogatú levegőt zár el, amelynek hőmérséklete megint T_0 = 300 K és nyomása megegyezik a külső levegőével. A tartályt a hengerrel összekötő vékony csövön lévő csapot újra óvatosan kinyitjuk, majd a tartály belevegőzése után azonnal elzárjuk. Most is azt vesszük észre, hogy a dugattyú majdnem hozzáér a henger végéhez.

b) Határozzuk meg a tartályban lévő levegő hőmérsékletét a csap elzárása után, valamint a V_0' térfogatot!

Megoldás. *a)* A csap szűk bejáratánál mindig p_0 a nyomás. A külső levegőből n mól szivárog be:

$$p_0V_0 = nRT_0 \,. \tag{1}$$

A tartályban kialakuló végállapot:

$$p_0V = nRT. \tag{2}$$

A külső levegő által végzett munka:

$$W = p_0V_0 \,. \tag{3}$$

A termodinamika I. főtétele szerint a dugattyútól balra levő gázmennyiség belső energia-változása megegyezik a külső levegő által végzett munkával:

$$\frac{5}{2}p_0(V-V_0)=p_0V_0. \tag{4}$$

Osszuk el az első egyenletet a másodikkal, majd a negyedikből fejezzük ki a térfogatok arányát:

$$\frac{V}{V_0}=\frac{T}{T_0}=\frac{7}{5}. \tag{5}$$

Innen a tartály térfogata:

$$V=\frac{7}{5}V_0=28\,\text{liter}. \tag{6}$$

Tehát a bezárt levegő hőmérséklete:

$$T=\frac{7}{5}T_0=\mathbf{420\,K.} \tag{7}$$

A hőmérséklet tehát **420 K** lesz.

b) A tartályban T = 420 K-ről T_0 = 300 K-re csökkent a levegő hőmérséklete, tehát a nyomás

$$\frac{p_0}{T}=\frac{p}{T_0} \tag{8}$$

alapján $p=\frac{T_0}{T}p_0=\frac{5}{7}p_0$ lesz. Tegyük fel, hogy *n'* anyagmennyiségű gáz jut be a tartályba, ahol ezelőtt *n* anyagmennyiségű gáz volt. A folyamat előtt az átáramlott mennyiségre az állapotegyenlet:

$$p_0V_0'=n'RT_0. \tag{9}$$

A folyamat elején a bal oldalra vonatkozó állapotegyenlet:

$$pV=\frac{5}{7}p_0V=p_0V_0=nRT_0. \tag{10}$$

A gáz átáramlása akkor fejeződik be, amikor a V térfogatú tartályban a nyomás eléri a külső nyomást. Ebben az állapotban:

$$p_0V=(n+n')R(T_0+\Delta T). \tag{11}$$

A külső levegő által végzett munka (9)-et is figyelembe véve:

$$W=p_0V'=n'RT_0. \tag{12}$$

Ez a munka növeli a teljes gázmennyiségnek a belső energiáját. A kezdeti- és végállapotokat a jobb és a bal részben figyelembe véve a belső energia változása:

$$W=\frac{5}{2}(n+n')R(T_0+\Delta T)-\frac{5}{2}nRT_0-\frac{5}{2}n'RT=\frac{5}{2}(n+n')R\Delta T. \tag{13}$$

A fenti összefüggésekből a következő rendezési lépésekkel juthatunk el a végeredményig:

A (10) egyenlet alapján:

$$p_0V=\frac{7}{5}nRT_0. \tag{14}$$

Ezt (11)-ben figyelembe véve:

$$\frac{7}{5}nRT_0=(n+n')R(T_0+\Delta T). \tag{15}$$

(12) és (13) felhasználásával

$$n + n' = \frac{2n'T_0}{5\Delta T} \tag{16}$$

adódik. (15) és (16) alkalmazásával

$$n' = \frac{7}{2}\frac{\Delta T}{T_0 + \Delta T}n\,. \tag{17}$$

A (17)-et (16)-ban figyelembe véve, rendezve

$\Delta T = \frac{4}{45}T_0 = 26{,}66\ \mathrm{K} \approx 27\ \mathrm{K}$ adódik. Tehát közvetlenül a második fellevegőzés után a tartályban a hőmérséklet **327 K** lesz.

A V_0' térfogatot a (9), (10) és (17) egyenlet alapján határozhatjuk meg:

$$V_0' = \frac{n'RT_0}{p_0} = \frac{n'V_0}{n} = \frac{7}{2}\cdot\frac{\Delta T}{T_0 + \Delta T}V_0 = \frac{2}{7}V_0 = \mathbf{5{,}71\,liter.}$$

Tehát a V_0' térfogat **5,71 liter** volt.

Megjegyzés: A számítás az *a)* kérdésre adott válasz formalizmusával is megadható, amikor a belső energiát $\frac{5}{2}pV$ alakban fejezzük ki. Ebben az esetben először a V_0' térfogatot kapjuk meg. majd abból számíthatjuk ki a végső hőmérsékletet.

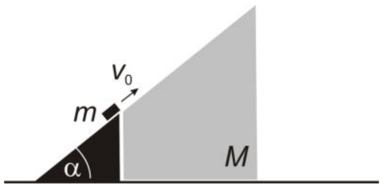
2.) Súrlódásmentes, vízszintes felületen $M = 5\,\mathrm{kg}$ tömegű, $\alpha = 30^\circ$ hajlásszögű, kellően hosszú, rögzítetlen (trapéz alakú) lejtő nyugszik közvetlenül egy talajhoz rögzített lejtő mellett az *ábra* szerint. A lejtők hajlássíkja törés- és hézagmentes, egybefüggő síkfelületet alkot. A rögzített lejtőről kisméretű (pontszerűnek kezelhető), $m = 1\,\mathrm{kg}$ tömegű testet indítunk, mely $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ sebességgel érkezik a rögzítetlen lejtőre. A lejtő és a kis test közti súrlódás szintén elhanyagolható.

a) Milyen magasra jut a kis test?

b) Maximálisan mekkora sebességre gyorsul fel a lejtő addig, amíg a kis test fel-le mozog rajta?

c) Milyen a kis test pályája a talajhoz képest? (A görbe egyenletét nem szükséges megadni.)

d) Mekkora a lejtő elmozdulása addig, amíg a kis test a lejtőn fel-le mozog



Megoldás. *a)* Amikor a kis test a legmagasabb pontba jut a lejtőn, a két test közös vízszintes u sebességgel mozog. Mivel vízszintes irányú külső erők nincsenek, a kis test kezdeti lendületének vízszintes összetevője megmarad:

$$mv_0\cos\alpha = (m + M)u\,, \tag{1}$$

amiből

$$u = \frac{mv_0\cos\alpha}{M + m} = 0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

adódik.

A kis test emelkedésének magasságát a mechanikai energia megmaradásának törvénye alapján határozhatjuk meg:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)\,u^2 + mgh\,, \tag{2}$$

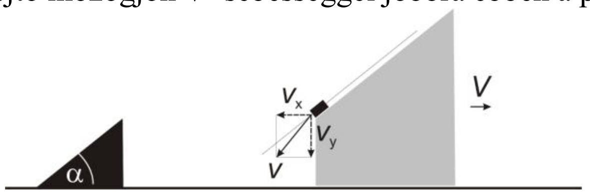
amiből

$$h = \frac{m\left(v_0^2 - u^2\right) - \mathrm{M}u^2}{2mg} = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{M + m\sin^2\alpha}{m+M} = \mathbf{1{,}1\,m} \tag{3}$$

adódik.

A kis test tehát **1,1 méterrel** emelkedik, azaz a lejtőn 2,2 métert csúszik fel.

b) A kis test a talajhoz képest v sebességgel hagyja el a lejtőt, aminek vízszintes és függőleges összetevőit jelöljük v_x-szel és v_y-nal. Legyen v_x iránya hátrafelé (balra) mutató, v_y iránya pedig lefelé mutató. A lejtő mozogjon V sebességgel jobbra ebben a pillanatban.



Vízszintes irányra érvényes a lendület-megmaradás:

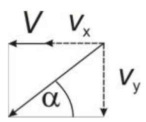
$$mv_0\cos\alpha = MV - mv_x\,. \tag{4}$$

Az energia-megmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right). \tag{5}$$

A kényszerfeltétel, ami azt fejezi ki, hogy a test a lejtőn mozog, azaz a lejtőhöz rögzített koordinátarendszerből szemlélve a lejtő hajlássíkjával párhuzamosan mozog:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x + V}\,. \tag{6}$$



Három egyenletünk van (4-6), három ismeretlennel. Kifejezve a kért sebességet:

$$V = 2\frac{m}{m+M}v_0\cos\alpha = \mathbf{1{,}44\,\frac{m}{s}} \tag{7}$$

adódik. A lejtő tehát maximálisan **1,44 m/s sebességre** gyorsul**.**

A kérdések megválaszolásához ugyan nem szükségszerű, de megadjuk a kis test sebességkomponenseit is:

$$v_x = \frac{M-m}{M+m}v_0\cos\alpha = 2{,}89\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \qquad v_y = v_0\sin\alpha = 2{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Vegyük észre, hogy $V = 2u$, azaz a lejtő sebessége éppen a kétszerese annak, mint amennyivel a lejtő és a kis test közösen mozgott, amikor a kis test a legfelső pontban volt (vagyis a tömegközéppont vízszintes sebességkomponensének). Az is feltűnő, hogy a végállapotban kis test sebességének függőleges összetevője nagyságában megegyezik, irányában pedig ellentétes a kis test kezdősebességének függőleges összetevőjével. Csupán az érdekesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a vízszintes irányt tekintve a kölcsönhatás olyan, mint egy rugalmas ütközés! A rugalmas deformáció helyett az energia a kis test helyzeti energiájába „vész el". A „veszteség" akkor maximális, amikor mindkét test a tömegközéppont vízszintes sebességével mozog, és a kis test emelkedése maximális. Utána ez az energia visszaalakul, és a kezdő és végállapot közt az mozgási energia és az impulzus vízszintes komponense is megmarad. Mivel a test függőleges sebességének a nagysága a kiindulási és a végállapotban azonos, a vízszintes irányhoz rendelhető mozgási energia külön megmaradó mennyiség, azaz a vízszintes irányt tekintve egy rugalmas ütközés zajlott le.

c) A rendszer tömegközéppontja sebességének a vízszintes összetevője állandó:

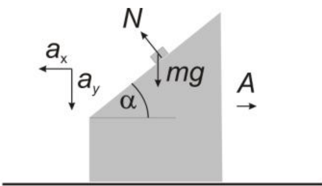
$$u = \frac{m v_0 \cos\alpha}{M + m} = 0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ha beülünk az u sebességgel vízszintes irányban (jobbra) egyenletesen mozgó koordinátarendszerbe (K'), akkor a kis test lecsúszását úgy látjuk, hogy nulla kezdősebességgel indul a K'-ben éppen álló lejtőn. Ebben a rendszerben a kis test egyenes vonalú pályán mozog egyenletesen gyorsuló mozgással, hivatkozva a jól ismert klasszikus példa konklúzióira. Ha visszatérünk a laborrendszerre, akkor abban a kis test mozgása egy ferde irányú egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás és egy vízszintes irányú egyenletes mozgás szuperpozíciójaként áll elő. **Ez pedig parabola pályát jelent**, ahogy azt a ferde hajítás különböző eseteinél számtalanszor láthattuk.

Mivel a kis test a lejtő alsó sarkánál van a mozgás kezdetekor is, meg a végénél is, ezért a K' rendszerben a kis test ugyanazon az egyenesen mozog felfelé és lefelé. De nem ez az egyenes alkotja a parabola ferde tengelyét. A parabolának lesz olyan pontja, ahol az érintője (a sebesség iránya) merőleges a kis test gyorsulásának irányára. Tehát a parabola tengelye ezen a ponton megy át, és a tengely iránya megegyezik a gyorsulás, vagyis az eredő erő irányával. Már ebből is látszik, hogy a nehézségi erő mellett a kis testre (illetve a lejtőre) ható kényszererő is állandó.

Mindezek alapján úgy is elképzelhetjük a mozgást, hogy $\alpha = 30^\circ$-os szögben v_0 kezdősebességgel megy egy egyenes vonalú egyenletes mozgás, amire rárakódik egy ferde irányú egyenletesen gyorsuló mozgás. Ez az elképzelés is a parabola pályához vezet.

d) A fentiekben láttuk, hogy a K' rendszerben a gyorsulásvektor állandó. Ez ezt jelenti, hogy a ható erőknek, következésképp a kényszererőnek is állandónak kell lennie. Ha áttérünk a laboratóriumi rendszere, ami K'-höz képest egyenes vonalban egyenletesen mozog az erőknek változatlannak kell maradni. Tehát a kényszererő és a gyorsulások a teljes (felfelé-lefelé) mozgás során állandók, következésképp az alábbi (8-11) egyenletek a teljes kényszermozgás során érvényesek.



A mozgásegyenletek:

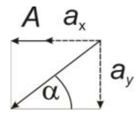
a lejtőre: $$N\sin\alpha = MA. \tag{8}$$

A kis testre vízszintes irányban: $$N\sin\alpha = ma_x. \tag{9}$$

A kis testre függőleges irányban: $$mg - N\cos\alpha = ma_y. \tag{10}$$

Kényszerfeltétel a gyorsulásokkal megfogalmazva:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x + A}. \tag{11}$$



A (8) – (11) egyenletekből a következő eredményeket kapjuk:

$$N = \frac{mMg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} = 8{,}25\ \mathrm{N}, \qquad a_x = \frac{M\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} g = 4{,}12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$a_y = \frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha} g = 2{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \quad A = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} g = 0{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Függőleges irányban a test h = 1,1 métert mozog a_y = 2,86 m/s^2 gyorsulással, amihez

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}} = 0{,}875\ \mathrm{s} \tag{12}$$

időre van szüksége. Az erők állandóságából, és abból, hogy a test a kiinduló magasságba jut vissza egyenesen következik, hogy a felfelé és a lefelé haladás ideje azonos.

Mivel a gyorsulás állandó, a lejtő elmozdulása:

$$s = \frac{A}{2}(2t)^2 = \mathbf{1{,}26\ m.} \tag{13}$$

Tehát a lejtő elmozdulása **1,26 m.**

Az eredmény paraméteres alakban:

$$s = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\left[M + m\sin^2\alpha\right]m}{(m+M)^2\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Megjegyzés: A fentitől különböző, fizikailag helyes megoldásokat is elfogadjuk.

Egy alternatíva a *d)* kérdés megválaszolására:

A függőleges mozgáshoz tartozó gyorsuláskomponens állandó, tehát

$$h = \frac{v_0\sin\alpha}{2} t,$$

ahol t a felfelé mozgás ideje.

A teljes mozgás ideje $2t$, ezalatt a lejtő által megtett út

$$s=\frac{V}{2}2t=Vt=\frac{2Vh}{v_0\sin\alpha}.$$

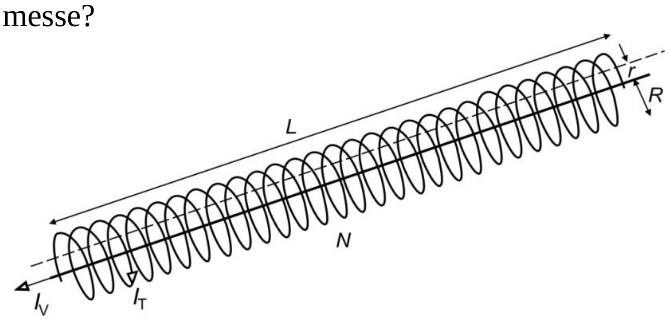
Figyelembe véve (3)-t:

$$s=\frac{2v_0^2}{g}\frac{\left[M+m\sin^2\alpha\right]m}{(m+M)^2\operatorname{tg}\alpha}=1,26\ \mathrm{m}.$$

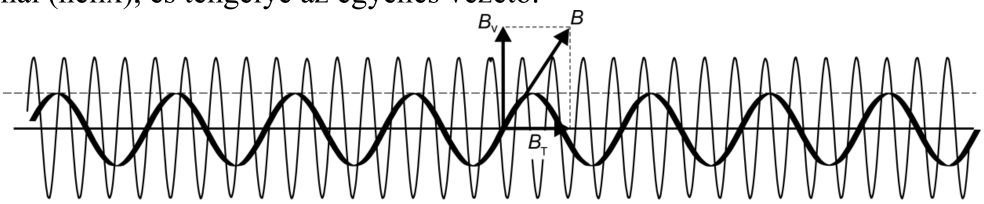
3.) N = 5000 menetszámú, L= 2 m hosszúságú, R = 2 cm sugarú, egyenes tekercs tengelyében hosszú egyenes vezetőszál húzódik. A tekercsben I_T = 20 mA erősségű egyenáram folyik. A vezetékben folyó áram erőssége I_V. A két áram hatására keletkező mágneses terek szuperpozíciója görbe vonalú indukcióvonalakat eredményez.

a) Jellemezzük a kialakult mágneses mezőt!

b) Gondolatban jelöljünk ki egy, a tekercs tengelyével párhuzamos, attól r = R/2 távolságban húzódó egyenest, amelyet valamelyik indukcióvonal metsz. Mekkora legyen az egyenes vezetőszálban folyó áram erőssége, hogy ezt az egyenest ez az indukcióvonal méterenként 12-szer messe?

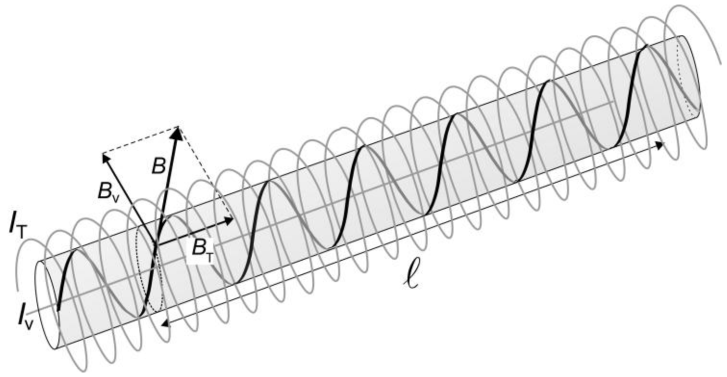


Megoldás. *a)* Az egyenes tekercs homogén, a tengelyével párhuzamos indukcióvonalakkal jellemzett mágneses teret hoz létre. Erre szuperponálódik az egyenes vezető mágneses tere (indukcióvektorának nagyságát B_V-vel jelöljük), amelynek indukcióvonalai a vezetékre merőleges, azzal koncentrikus körök. A kiválasztott, a tekercs tengelyétől r = R/2 távolságban húzódó egyenes azon pontjában, amelyben az eredő mágneses tér kiszemelt indukcióvonala metszi azt (indukcióvektorának nagyságát B_T-vel jelöljük), a tér ezen pontját két, egymásra merőleges indukcióvektor összegeként előálló eredő indukcióvektor (B) jellemzi. Mivel az egyenes vezető tere állandó nagyságú indukciót hoz létre az r távolságban, valamint a tekercs belsejének minden pontjában állandó nagyságú és irányú indukcióvektorokat kelt, ezek vektorösszege egy olyan görbe mentén helyezkedik el, amely egyenletes menetemelkedésű csavarvonal (helix), és tengelye az egyenes vezető.

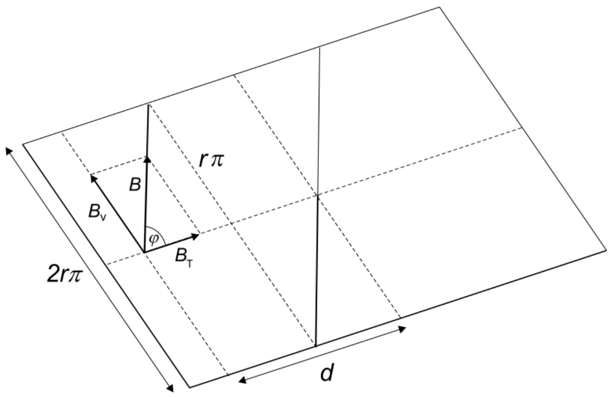


b) Valójában a kiválasztott indukcióvonal és a tekercs tengelyével párhuzamos, attól r távolságra húzódó metszéspontok vonal menti sűrűségét adta meg a feladat. Ebből kell visszakövetkeztetni a csavarvonal menetemelkedésére, és ebből a keresett áram erősségére.

A kétféle mágneses mező indukcióvektorai, valamint a szuperpozíciójuk az alábbi ábrán látható. Az eredő mező indukcióvonala egy, az r sugarú hengerre felcsavarodó vonal, amelynek egy kivágott és síkba kiterített részéről a menetemelkedés nagysága leolvasható:



A halvány csavarvonal (képe) a tekercset, a halvány egyenes a vezetéket jelzi, a henger sugara r, amelyre felcsavarodik az eredő mező kiválasztott indukcióvonala. Ennek egy szeletét síkba kiterítve láthatjuk az alábbi ábrán:



Innen leolvasható, hogy a metszéspontok d periodicitása (menetemelkedés)

$$d = \frac{2r\pi}{\mathrm{tg}\varphi}. \qquad (1)$$

A φ szöget a két indukcióvektor aránya adja meg:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{B_V}{B_T}. \qquad (2)$$

Az előírt menetsűrűséget az $n = \frac{\ell}{d}$ hányados jellemzi, ahol esetünkben $\ell = 1$ m, és a menetsűrűség $n = 12$, azaz a menetemelkedés $d = \frac{1}{12}$ m..

(2)-t (1)-be írva:
$$d = \frac{2r\pi}{\frac{B_V}{B_T}} = 2r\pi\frac{B_T}{B_V} \qquad 3)$$

Az egyenes tekercs által létrehozott indukció a tekercs belsejében mindenhol:

$$B_T = \mu_0\frac{I_T N}{L},$$

az egyenes vezetőé tőle r távolságban:

$$B_V = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

Ezeket (3)-ba írva:

$$d = 2r\pi \frac{B_T}{B_V} = 2r\pi \frac{\mu_0 \frac{I_T N}{L}}{\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_V}{r}} = 4r^2\pi^2 \frac{I_T N}{I_V L}.$$

A vezeték keresett áramerőssége:

$$I_V = 4r^2\pi^2 \frac{I_T N}{dL} = 4\pi^2 \left(1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)^2 \frac{2 \cdot 10^{-2}\ \text{A} \cdot 5000}{\frac{1}{12}\,\text{m} \cdot 2\ \text{m}} = \mathbf{2,37\ A.}$$

Megjegyzés: Helyes megoldásként fogadható el az is, ha a méterenkénti 12 metszéspontot úgy értelmezzük, hogy a szakaszt 11 részre osztjuk. Ilyenkor kissé eltérő eredményt kapunk.

Értékelési útmutató

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.

1. feladat

a) Állapotegyenlet a kezdő állapotra	0,5 pont
Annak észrevétele, hogy a folyamat végén a külső és belső nyomás megegyezik	1 pont
Állapotegyenlet a végállapotra	0,5 pont
A külső légtér munkavégzése	2 pont
Termodinamika első főtétele	2 pont
A kért térfogat érték megadása	1 pont
A kért hőmérséklet érték megadása	1 pont
b) A kihűlés után az új nyomás megadása	1 pont
Állapotegyenletek helyes felírása	3 pont
A külső légtér munkavégzése	2 pont
A belső energiaváltozás helyes felírása	2 pont
A kért hőmérséklet érték megadása	2 pont
A kért térfogat helyes megadása	2 pont
	Összesen: 20 pont

2. feladat

a) Annak felismerése, hogy ebben az állapotban a relatív mozgás megszűnik	1 pont
Az impulzus-mérleg alkalmazása	1 pont
Az energia-mérleg alkalmazása	1 pont
A magasság megadása	1 pont
b) Az impulzus-mérleg alkalmazása	1 pont
Az energia-mérleg alkalmazása	1 pont
A kényszerfeltétel megfogalmazása	1 pont
A kért sebesség megadása	2 pont
c) Helyes érvek felsorakoztatása, a „parabola” kimondása	5 pont
d) Mozgásegyenlet a lejtőre	0,5 pont
Mozgásegyenlet a kis testre (vízszintes)	0,5 pont
Mozgásegyenlet a kis testre (függőleges)	1 pont
Kényszerfeltétel a gyorsulásokkal megfogalmazva	1 pont
A végeredményhez szükséges gyorsulásértékek helyes megadása	1 pont
A mozgás időtartamának megadása	1 pont
A lejtő elmozdulásának megadása	1 pont
	Összesen: 20 pont

3, feladat

a) A kialakuló eredő mágneses mező indukcióvonalainak helyes jellemzése	8 pont
b) A menetemelkedés helyes meghatározása	4 pont
A menetemelkedés helyes kifejezése az indukcióvektorokkal	3 pont

A menetemelkedés helyes kifejezése a vezeték és tekercs adataival	3 pont
A kertesett áram erősségének helyes meghatározása	2 pont
	Összesen: 20 pont