A 2012/2013. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatai és megoldásai

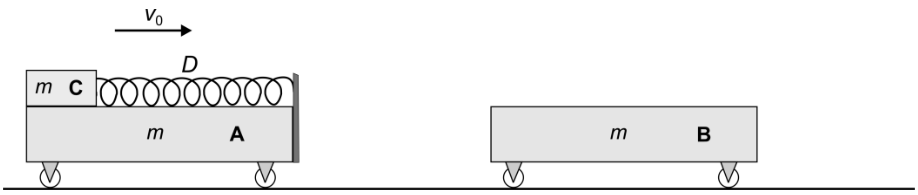
I. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első két feladat és a 3/A és 3/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Csak 3 feladat megoldására adható pont. A 3/A és 3/B feladat közül a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

1. *Két, egyenként* m = 2,4 kg *tömegű, könnyen gördülő kiskocsi áll egy vonalban egy vízszintes felületen. Az egyik kocsi (A) tetején az ábra szerint egy ugyancsak m tömegű kisebb téglatest (C) nyugszik egy* D = 1,20 N/m *direkciós erejű könnyű rugónak támaszkodva. A testek között a súrlódás elhanyagolható. Ennek a kocsinak a rajta levő testtel együtt* v_0 = 0,5 m/s *nagyságú sebességet adunk, amellyel az a nyugvó kocsinak (B) ütközik. Az ütközés tökéletesen rugalmas és pillanatszerű. Az ütközés után a téglatest előre csúszik.*

a) Milyen távol lesz egymástól a két kocsi abban a pillanatban, amikor a rugó a legrövidebb?

b) Mekkora ebben a pillanatban a testek gyorsulása?



Megoldás. *a)* Az üközés pillanatszerűsége miatt csak a két kocsi között lép fel ütközéskor kölcsönhatás, hiszen súrlódás nincs, a rugó pedig csak akkor kezd erőt kifejteni, amikor már valamelyest összenyomódott. Az egyenlő tömegek miatt pedig a két kocsi között „sebességcsere” történik. A közvetlen ütközés utáni kezdősebességeket jelöljük u_0-lal! Ezek tehát:

$$u_{A0} = 0,$$

$$u_{B0} = v_0 = 0,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$u_{C0} = v_0 = 0,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ettől kezdve a B kocsi egyenletes mozgással, u_B = 0,5 m/s sebességgel távolodik az ütközés helyétől, és az A kocsi az ütközés után egy pillanatra megáll. A C test kezdősebessége ütközés után akkora, amekkorával érkezett, mintha semmi sem történt volna. Az AC rendszer lendülete is, mechanikai energiája is megmarad. A további mozgás során a C testet fékezi a rugó, az A kocsinak pedig növeli a sebességét. Amikor a rugó a legrövidebb, az A és a C test sebessége egy pillanatra megegyezik. Az ehhez a pillanathoz tartozó, az ütközéstől számítva eltelt időt és elmozdulásokat kell keresnünk.

Az A kocsi és a C kis test együttesére:

a lendület megmarad:

$$m_A u_{A0} + m_C u_{C0} = (m_A + m_C)\, u_k.$$

az energia megmarad:

$$\frac{1}{2} m_C u_{C0}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_C) u_k^2 + \frac{1}{2} D(\Delta l)^2.$$

Egyszerűsítés után és felhasználva a tömegek egyenlőségét, valamint, hogy $u_{A0} = 0$:

$$u_{C0} = 2u_k; \qquad (1)$$

$$2u_k^2 + \frac{D}{m}(\Delta l)^2 = u_{C0}^2. \qquad (2)$$

Itt u_k az A és C test közös pillanatnyi sebessége, másként a tömegközéppontjuk sebessége. Ennek nagysága (az egyenlő tömegek miatt): $u_k = v_0/2 = 0{,}25$ m/s. (1)-et (2)-be írva:

$$2u_k^2 + \frac{D}{m}(\Delta l)^2 = 4u_k^2 \qquad \rightarrow \qquad \Delta l = u_k\sqrt{\frac{2m}{D}} = 0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{2\cdot 2{,}4\ \mathrm{kg}}{1{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0{,}5\ \mathrm{m}.$$

A kocsi és a kis test tömegközéppontja egyenletes sebességgel halad, és a tömegközépponti rendszerben mindkét test azonos periódusidővel harmonikus rezgést végez. Ebben a rendszerben a rugó középpontja áll, vagyis a rugó két, egyenlő hosszú szakaszra bontható, aminek következtében a periódusidőt meghatározó direkciós erő kétszerese a teljes hosszúságú rugóénak. Az ütközéstől mérve a rugó legrövidebb hosszának felvételéig eltelt idő a periódusidő negyedrésze, tehát a kérdéses pillanat az ütközést követően $t = T/4$ idő múlva következik be:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{2D}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2{,}4\ \mathrm{kg}}{2\cdot 1{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 1{,}57\ \mathrm{s}.$$

Ezalatt az idő alatt a meglökött B kocsi egyenletes mozgással

$$S_B = u_B t = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}57\ \mathrm{s} = 0{,}785\ \mathrm{m} = 78{,}5\ \mathrm{cm}$$

utat tesz meg, míg az A kocsi (ha a rugó nem nyomódna össze a tömegközéppont útját tenné meg, mivel azonban a rugó összenyomódik, annyival kevesebbet, amennyi a rugó deformációjának a fele):

$$S_A = S_k - \frac{\Delta l}{2} = u_k t - \frac{\Delta l}{2} = 0{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 1{,}57\ \mathrm{s} - \frac{0{,}5\ \mathrm{m}}{2} = 0{,}1425\ \mathrm{m} = 14{,}25\ \mathrm{cm}.$$

A két kocsi távolsága tehát

$$D = S_B - S_A = 0{,}785\ \mathrm{m} - 0{,}1425\ \mathrm{m} = 0{,}6425\ \mathrm{m} \approx \mathbf{64\,cm.}$$

b) A B kocsi gyorsulása 0, az A kocsi és a C test gyorsulása ellentetten egyenlő, független a mozgásállapottól. Az A kocsi haladási irányban, a kis test azzal ellentétes irányban gyorsul. Abszolút értékük:

$$|a| = \frac{F}{m} = \frac{D\Delta l}{m} = \frac{1{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 0{,}5\ \mathrm{m}}{2{,}4\ \mathrm{kg}} = \mathbf{0{,}25\,\frac{m}{s^2}}.$$

(Megjegyzés: míg a rezgésidő meghatározásánál $2D$-vel kellett számolni, addig a gyorsulások számításához a teljes D-t kellett figyelembe venni, hiszen a mozgásegyenlet szerint $a = F_r/m,$ és a rugóerő csak a D-től és Δl-től függ.)

2. *Egy dugattyúval ellátott tartályban* 0,1 *liter víz és* 1 *liter vízgőz található* 100 °C *hőmérsékleten. Ezzel a rendszerrel a következő körfolyamatot végezzük:*

(1) Izotermikusan megnöveljük a térfogatot 1,1 *literről* 2,1 *literre.*

(2) Adiabatikusan tágítjuk a rendszert, amíg hőmérséklete eléri a 95 °C*-ot.*

(3) Izotermikusan összenyomjuk a rendszert egy megfelelő térfogatra.

(4) Adiabatikusan összenyomjuk a rendszert a kiindulási állapotba.

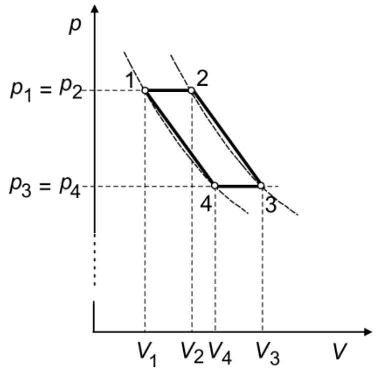
- *a) Vázoljuk a körfolyamatot p-V diagramon!*
- *b) Határozzuk meg az állapotjelzők értékeit a körfolyamat nevezetes pontjaiban!*
- *c) Adjuk meg a körfolyamat hatásfokát!*

Útmutatás: A számítás során végezhetünk ésszerű közelítéseket úgy, hogy eredményeink pontossága hozzávetőlegesen 10 %-os hibahatáron belül maradjon. A megoldáshoz szükséges adatokat vegyük Függvénytáblázatból. Mivel sem a hőmérséklet változása, sem a nyomás változása nem különösebben nagy, ezért a körfolyamat egyes szakaszait a *p–V* diagramon egyenes szakaszokkal közelíthetjük.

Megoldás. *a)* A körfolyamat a *p –V* diagramon egy parallelogramma, melynek csúcsai a következők:

p_1 = 101,3 kPa	p_2 = 101,3 kPa	p_3 = 84,5 kPa	p_4 = 84,5 kPa
$V_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$	$V_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$	$V_3 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$	$V_4 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$

Ezeket az adatokat a következő megfontolások alapján határoztuk meg:



Kiinduláskor a tartályban víz és vízgőz található egyensúlyi állapotban 100 °C hőmérsékleten. Ez azt jelenti, hogy a nyomás 1 atm = 101,3 kPa ≈ 10^5 Pa. Függvénytáblázatbeli adatokat használva megállapíthatjuk, hogy kezdetben a gőz tömege 0,6 g, mert 100 °C-on a telített vízgőz sűrűsége 0,5977 kg/m^3 ≈ 0,6 g/l, míg a víz tömege 95,8 g, mert 100 °C-on a víz sűrűsége 958,38 kg/m^3 ≈ 958 g/l.

b) Az (1) → (2) tágulási folyamat során nemcsak a hőmérséklet, hanem a nyomás is állandó, hiszen a telített vízgőz nyomása egészen addig 1 atm marad, amíg a teljes vízmennyiség gőzzé nem válik. Az izotermikus tágulás végén 1,2 g gőz lesz a tartályban, hiszen a térfogat 1 literrel nő meg, tehát 0,6 grammal kevesebb, vagyis 95,2 g víz marad. A víz térfogatának 6 ezreléknél is kevesebb csökkenését elhanyagolhatjuk.

95°C-on a rendszer nyomása a Függvénytáblázat adatai alapján 84,5 kPa értékre csökken. Ekkor a gőz sűrűsége nagyjából 0,5 g/liter, a víz sűrűsége pedig 962 g/liter, a víz és a gőz teljes tömege az előzőek alapján 96,4 g. Ez sokféle módon valósulhat meg, tehát önmagában a tömegmegmaradásból nem lehet meghatározni a rendszer térfogatát az adiabatikus tágulás után. Célravezető viszont az első főtétel alkalmazása.

A (2) → (3) adiabatikus tágulás során a rendszer által végzett munkát egy trapéz területeként számíthatjuk ki, ami egyenlő lesz a rendszer belső energia változásának abszolút értékével:

$$\frac{(V_3 - V_2)\cdot(p_2 + p_1)}{2} = c_{víz}\left(m_{víz} - \frac{|\Delta m|}{2}\right)|\Delta T| - L_f\,|\Delta m|$$

$$|\Delta m| = \rho_{gőz}(V_3 - V_2).$$

Az egyenlet felírásakor számos közelítést használtunk. A bal oldalon feltettük, hogy a (2) → (3) átalakulás a *p – V* diagramon egyenessel közelíthető (ezt javasolta a feladat útmutatása). A jobb oldalon elhagytuk a rendszerben lévő gőz belső energiájának változását, mert a gőz tömege a vízhez képest kicsiny, továbbá a gőz fajhője nagyjából harmada a víz fajhőjének. A víz fajhője is változik kissé a hőmérséklettel, de erre nézve nincsenek könnyen elérhető adatok, ezért a víz fajhőjét 4,2 J/(g·°C) értéknek tekintettük. A folyamat során változik a víz mennyisége, változik a víz forráshője, és a keletkező gőz sűrűsége is. Ezek nem túlságosan nagy változások, ezért minden esetben a kezdő és a végállapotbeli értékek számtani közepét használtuk. Az egyenlet megoldása:

$$V_3 - V_2 = \frac{c_{víz} m_{víz}|\Delta T|}{\dfrac{p_2 + p_3}{2} + \left(c_{víz}\dfrac{|\Delta T|}{2} + L_f\right)\rho_{gőz}}.$$

A megfelelő numerikus értékek behelyettesítése után: $V_3 - V_2 = 1{,}49\cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3 \approx 1{,}5$ liter.

Tehát az adiabatikus tágulás során 101,3 kPa értékről 84,5 kPa értékre csökken a nyomás, miközben a térfogat 2,1 literről 3,6 literre növekszik. Ez azt jelenti, hogy nagyjából 3,5 liter lesz a gőz térfogata, aminek a tömege kb. 1,8 gramm, míg a víz tömege 95 °C-on 94,6 gramm, aminek a térfogata valóban közelítőleg 0,1 liter.

Végül azt kell észrevennünk, hogy az adiabatikus összenyomáskor gyakorlatilag ugyanaz történik, mint az adiabatikus táguláskor, hiszen a 95 °C-on történő izotermikus folyamat közben a lecsapódó gőz mennyisége 0,1 grammon belül megegyezik a kezdeti 100 °C-os izotermikus táguláskor elpárolgó gőz mennyiségével, vagyis jó közelítéssel ugyanazokat az egyenleteket írhatjuk fel. Ez tehát azt jelenti, hogy az izotermikus összenyomáskor 1 literrel csökken a térfogat, miközben 0,5 gramm vízgőz csapódik le. Tehát a p – V diagramon a körfolyamat valóban parallelogrammával közelíthető.

c) A hatásfok számításakor a végzett munka a parallelogramma területével feleltethető meg, míg a felvett hő 0,6 gramm víz elforralásához szükséges energiával egyezik meg.

A hatásfok:

$$\eta = \frac{W}{Q_{fel}} = \frac{(V_2 - V_1)(p_2 - p_3)}{L_f \Delta m_{gőz}} = 0,0124 \approx \mathbf{1,2\,\%}.$$

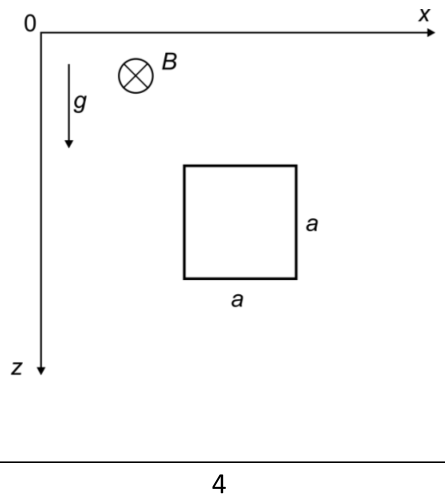
Második megoldás:

Azt a körfolyamatot, amely két adiabatikus és két izotermikus szakaszból áll, és így valósít meg egy hőerőgépet két különböző hőmérsékletű hőtartály között, Carnot-ciklusnak nevezzük. Az ideális Carnot-gép (amikor tökéletesen izotermikusak, illetve adiabatikusak a változások) hatásfoka attól független, hogy ezt milyen anyaggal valósítjuk meg. Ennél nagyobb hatásfokú hőerőgépet nem működtethetünk periodikusan a két hőtartály között. Tehát a feladatot egyszerűen megoldhatjuk a Carnot-gép jól ismert maximális hatásfoka alapján is:

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1,34\% \approx \mathbf{1,3\,\%}.$$

Megjegyzés: A paralelogramma alakú körfolyamat csak közelítően igaz, a valódi görbe két párhuzamos egyenesből és két íves szakaszból áll. Döntően ez indokolja, hogy nem kapjuk vissza pontosan az ideális hatásfok értéket.

3/A. *Egy négyzet alakú,* 4*a kerületű, m tömegű, függőleges síkú fémkeretnek valamekkora kezdősebességet adunk. A keret mindvégig saját függőleges síkjában mozog a g nehézségi gyorsulású gravitációs és a keretre merőleges mágneses térben, továbbá forgó mozgást sem végez. A mágneses indukcióvektor a következő összefüggés szerint függ a helytől: B*(z) = *B*(0) + *kz, ahol k = állandó. A keret elektromos ellenállása R. Mekkora lehet a keret kezdősebessége, ha az elindítás után a keret egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez?*



Megoldás. A mágneses tér x irányban nem változik, ezért a fluxusváltozást csak a z irányú (függőleges) mozgás eredményezi. Tehát a keretnek tetszőleges x irányú kezdősebességet adhatunk, viszont a z irányú kezdősebesség csak meghatározott értékű lehet.

Ha a keret v_z sebességgel mozog lefelé, akkor a pillanatnyi fluxus:

$$\Phi = \frac{B(0) + kz + B(0) + (kz + a)}{2} \cdot a^2 = \left[B(0) + k\left(z + \frac{a}{2} \right) \right] \cdot a^2 .$$

Itt úgy tekintettük, hogy a keret teteje van a z szinten. Mivel a mágneses indukció lineárisan növekszik z irányban, ezért lehet a keret tetején és az alján mérhető indukció vektorok nagyságának számtani közepét venni a fluxus kiszámításakor.

A fluxusváltozásban csak az játszik szerepet, hogy a z koordináta változik, ami éppen a keresett v_z sebesség. Tehát a fluxusváltozás így írható fel:

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = ka^2 v_z .$$

A fluxusváltozás adja a keretben indukálódó feszültséget, amiből a keretben folyó állandó nagyságú áram meghatározható:

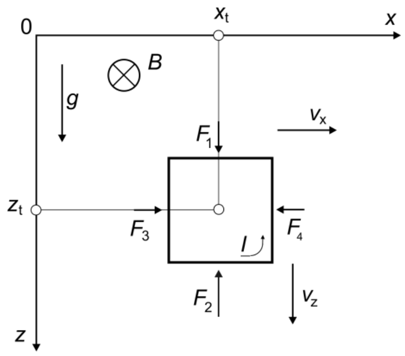
$$I = \frac{\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}}{R} = \frac{ka^2 v_z}{R}$$

A keret alsó vízszintes oldalára nagyobb erő hat, mint a felsőre (a két függőleges oldalra ható erő kiejti egymást), sőt az alsó élre felfelé mutató, a felső élre lefelé mutató erő hat. Ezeknek az eredője tart egyensúlyt a nehézségi erővel:

$$F = \ ka \ \cdot aI = \frac{k^2 a^4 v_z}{R} = mg,$$

amiből

$$v_z = \frac{mgR}{k^2 a^4} .$$



Hallgatólagosan feltételeztük, hogy $k > 0$, ami azonban instabil megoldást ad. Stabil megoldást csak a $k < 0$ eset eredményez, azonban ez is instabillá válik, ha B előjelet vált.

A feladat megoldása tehát az, hogy a keret kezdősebessége:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

ahol v_x tetszőleges nagyságú lehet, v_z pedig csak a fenti érték.

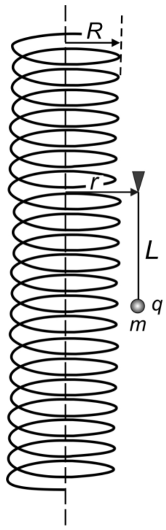
Második megoldás:

A feladat utolsó része energetikai megfontolással is megoldható. A keret magassági helyzeti energiájának csökkenése egyenlő a keretben keletkező Joule-hővel:

$$mgv_z\Delta t = I^2R\Delta t = \left(\frac{ka^2}{R}\right)^2 v_x^2 R\Delta t,$$

amiből a fentivel azonos z irányú sebesség adódik.

3/B. *Függőleges helyzetű, igen hosszú,* R = 5 cm *sugarú egyenes tekercs belsejét* μ_{rel} = 500 *relatív permeabilitású ötvözet tölti ki. A tekercs menetsűrűsége* n = 2000/m, *ohmikus ellenállása elhanyagolható. A tekercs mellett, annak közepe táján egy elhanyagolható tömegű* L = 10 cm *hosszú szigetelő szálra egy* m = 0,01 g *tömegű,* $q = 5\cdot10^{-6}$ C *töltésű kisméretű fémgömböt függesztettünk fel a tekercs tengelyétől* r = 6 cm*-re. A tekercsen* Δt = 0,001 s *alatt az addig állandó erősségű áram erősségét egyenletesen* 5 A*-ről* 0*-ra csökkentjük. Mekkora szöggel térül ki a fonál?*



Megoldás. A rendkívül rövid idő miatt az erőlökés alatt még alig mozdul meg a kis test, csak lendületet kap:

$$F\Delta t = \Delta mv \qquad v = \frac{F\Delta t}{m} \qquad (v = \Delta v, \quad \text{ui. } v_0 = 0.)$$

Az erő a változó mágneses tér keltette elektromos mezőtől származik, amelynek nagysága

$$F = qE_{\text{i}},$$

ahol E_{i} az indukált mező térerőssége, amely az adott időtartamban állandó. Az indukció törvénye szerint:

$$\sum_{g}^{\text{O}} E\Delta r = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta BA}{\Delta t} = \mu_0\mu_{\text{r}}\frac{N\Delta I}{l}\frac{A}{\Delta t} = \mu_0\mu_{\text{r}}\frac{n\Delta I}{\Delta t}A.$$

A fémgömb távolságában egy elektromos erővonal mentén számolva E nagysága állandó lévén:

$$E2r\pi = \mu_0\mu_{\text{r}}\frac{n\Delta I}{\Delta t}A \quad \rightarrow \quad E = \frac{\mu_0\mu_{\text{r}}}{2r\pi}\frac{n\Delta I}{\Delta t}A.$$

Ezzel a kis gömböcske kezdősebessége:

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{Eq\Delta t}{m} = \frac{\frac{\mu_0\mu_{\text{r}}}{2r\pi}\frac{n\Delta I}{\Delta t}Aq\Delta t}{m} = \frac{\mu_0\mu_{\text{r}}}{2r\pi}\frac{n\Delta I}{m}Aq = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\mu_{\text{r}}}{2r\pi}\frac{n\Delta I}{m}Aq = \frac{2\cdot10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\mu_{\text{r}}}{r}\frac{n\Delta I}{m}Aq.$$

Beírva az adott értékeket:

$$v=\frac{2\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot 500\cdot 2000\,\frac{1}{\text{m}}\cdot 50\ \text{A}\cdot 0,05^2\,\text{m}^2\pi\cdot 5\cdot 10^{-6}\,\text{C}}{0,06\ \text{m}\cdot 10^{-5}\text{kg}}=0,6545\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A kis elektrosztatikus inga kilendül, az elért magasságot az energiatételből kapjuk:

$$h=\frac{v^2}{2g}=\frac{0,6545^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}=0,0214\text{m}=2{,}14\ \text{cm}.$$

A szögelfordulás koszinuszára írhatjuk:

$$\cos\varphi=\frac{l-h}{l}=\frac{10-2{,}14}{10}=0,786,$$

és a keresett szögelfordulás:

$$\varphi=\arccos 0,786=38{,}187\approx\mathbf{38°.}$$